3

Torziona divergencija uzgonskih površina

U ovom poglavlju razmatra se torziona divergencija uzgonskih površina kao osnovni oblik statičke aeroelastične nestabilnosti i jedan od ključnih kriterijuma za određivanje gornje granice dozvoljenih brzina leta vazduhoplovnih konstrukcija.

Ova pojava proističe iz međusobno spregnutog dejstva aerodinamičkih sila i elastičnih deformacija krila, pri čemu ograničena torziona krutost konstrukcije omogućava porast lokalnog napadnog ugla usled uvijanja, a samim tim i porast aerodinamičkog momenta. Takva pozitivna povratna sprega dovodi do gubitka stabilnog ravnotežnog stanja kada aerodinamičko opterećenje prevaziđe sposobnost strukture da obezbedi elastični restitucioni moment.

Formulišu se linearizovani aeroelastični modeli torzione divergencije, koji omogućavaju analitičko sagledavanje fizičke suštine problema. Razmatra se uticaj torzione krutosti, položaja centra smicanja u odnosu na aerodinamički centar, kao i aerodinamičkih karakteristika profila na nastanak nestabilnosti. Poseban akcenat stavljen je na jasno razlikovanje strukturnih i aerodinamičkih referentnih tačaka, čime se omogućava precizna formulacija ravnoteže momenata u deformisanom stanju konstrukcije.

Dalje se sistematski razmatraju metode određivanja položaja centra smicanja tankozidnih preseka, uključujući egzaktne relacije iz teorije elastičnosti i inženjerske aproksimacije zasnovane na metodi idealizovanih nosača. U okviru analize torzione krutosti prikazani su analitički, eksperimentalni i numerički pristupi njenom određivanju, sa posebnim osvrtom na zatvorene torzione ćelije tipične za konstrukciju krila. Konačno, problem torzione divergencije proširuje se na realno krilo sa promenljivim geometrijskim, mehaničkim i aerodinamičkim parametrima duž raspona, što vodi ka formulaciji nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda sa promenljivim koeficijentima. Time se uspostavlja teorijska osnova za numeričku analizu kritične brzine divergencije savremenih uzgonskih površina.

Takođe, prikazane su i numeričke metode, kao što je metod Galerkina i metode zasnovane na metodama konačnih elementa.

3.1 Uvod u torzionu divergenciju uzgonske površi

Torziona divergencija krila predstavlja jedan od osnovnih aeroelastičnih nestabilnosti koji se javlja pri visokim brzinama leta, posebno kod vitkih, elastičnih krila.

Fenomen nastaje kada aerodinamički moment, koji raste sa povećanjem napadnog ugla, deluje na krilo koje ima ograničenu torzionu krutost, a posledica je elastičnosti strukture. Usled elastične deformacije u vidu uvijanja, napadni ugao lokalno raste, što dodatno povećava aerodinamički moment, stvarajući na taj način pozitivnu povratnu spregu. Kada ova sprega prevaziđe sposobnost strukture da se suprotstavi uvijanju, dolazi do eksponencijalnog porasta deformacija, čak i pri konstantnim uslovima leta. Ovaj proces, poznat kao torziona divergencija , može dovesti do gubitka kontrole, preopterećenja strukture ili potpunog strukturalnog loma.

Kritična brzina pri kojoj se divergencija javlja zavisi od niza faktora: torzione krutosti krila, položaja centra smicanja u odnosu na centar pritiska aerodinamičkih sila, raspodele mase i oblika aeroprofila. Klasični pristup analizi divergencije zasniva se na linearnoj aeroelastičnoj teoriji, gde se pretpostavlja ravnoteža između elastičnog restitucionionog momenta i aerodinamičkog momenta. U ovom poglavlju biće izvedena osnovna jednačina torzione divergencije za idealizovano krilo, diskutovani su uticaji geometrijskih i strukturalnih parametara, kao i praktični aspekti sprečavanja ove pojave u projektovanju modernih vazduhoplova. Takođe, biće prikazani analitičkii numerički pristupi za precizno određivanje kritične brzine divergencije kod realnih krila sa kompleksnim geometrijama i raspodelom masa.

3.2 Određivanje Brzine Divergencije Metodom Karakterističnog preseka

Prvi metod koji ćemo koristiti je metod karakterističnog preseka. U ovom pristupu određujemo kritičnu brzinu divergencije analizirajući trapezno krilo na mestu karakterističnog preseka koji se nalazi u intervalu **(0.7 - 0.75)** polurazmaha krila.

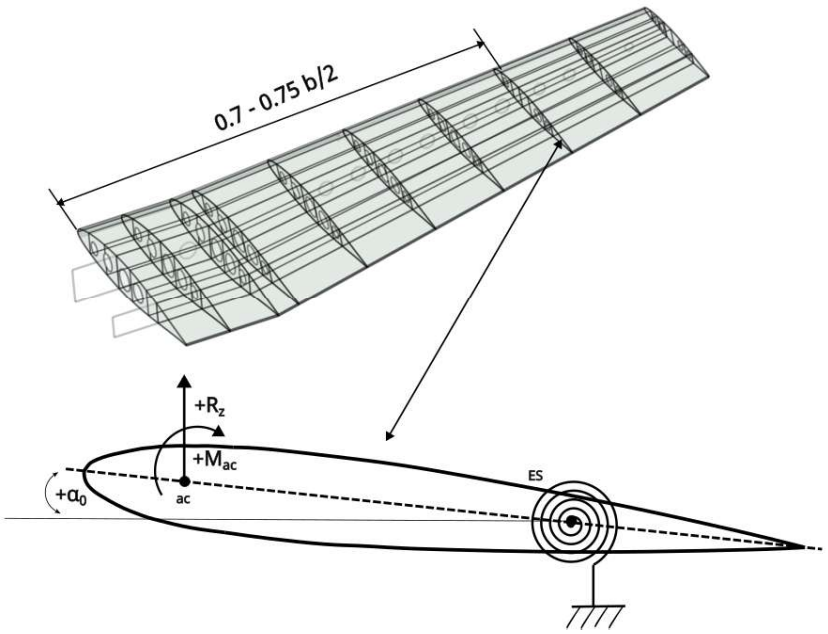
Tipičan (karakteristični) presek predstavlja jeadn od modela u aeroelastičnosti koji omogućava redukciju složenog, kontinualnog trodimenzionalnog krila na sistem sa konačnim brojem stepeni slobode (obično dva). Ovaj model se sastoji od krutog aeroprofila koji je povezan sa elastičnim osloncem preko sistema torzionih pruga.

Glavni cilj tipičnog preseka je da verno reprodukuje interakciju između tri vrste sila:

- **Aerodinamičke sile:** Uzgon i moment koji zavise od brzine leta i napadnog ugla.
- **Elastične sile:** Otpor strukture deformaciji (savijanju i uvijanju).
- **Inercijalne sile:** Otpor mase ubrzanju, ključne za dinamičku stabilnost.

Na profilu tipičnog preseka definišu se tri kritične tačke čiji međusobni položaji određuju stabilnost celokupne letelice:

- **Aerodinamički centar (AC):** Tačka u kojoj deluje rezultanta aerodinamičkih sila (uzgon). Kod podzvučnih profila nalazi se na oko 25% tetive ($c/4$).



Slika 3.1: Položaj Karakterističnog preseka, centra smicanja i aerodinamičkog centra

- **Centar smicanja (ES):** Naziva se i *elastični centar*. To je tačka oko koje se profil uvija pod dejstvom momenta. Predstavlja strukturni oslonac modela.
- **Centar mase (CM):** Težište samog preseka. Njegov položaj određuje inercijalni moment usled ubrzanja i direktno utiče na pojavu flatera.

Rastojanja između ovih tačaka nazivamo ekscentricitetima. Postoje različiti ekscentriteti koje definišemo kao:

- **Aerodinamički krak (e):** Rastojanje od AC do CS. Ako se AC nalazi ispred CS ($e > 0$), uzgon stvara moment koji teži da poveća napadni ugao, što je primarni uzrok **statičke divergencije**.
- **Inercijalni krak (x_α):** Rastojanje od CS do CM. Ovaj krak spreže translaciju (savijanje) i rotaciju (uvijanje). Što je CM dalje iza CS, to je veća verovatnoća pojave **flatera**.

Ova lokacija predstavlja karakteristično mesto aeroelastičnog odziva:

- **Težište aeroelastičnog odziva:** Na korenu krila deformacije su nula, dok su na vrhu maksimalne, vodeći računa da je na toj lokaciji lokalni uzgon relativno mali. Oblast između 70% i 75% je zona gde je proizvod lokalnog uzgona i amplitude deformacije najznačajniji.
- **Reprezentativnost modalnog oblika:** Prvi sopstveni oblici savijanja i uvijanja realnog krila imaju vrednosti koje se u ovoj zoni najbolje aproksimiraju ponašanjem krutog profila na oprugama.

– **Kritična brzina:** Analiza na ovoj lokaciji daje najpreciznije rezultate za kritičnu brzinu divergencije u poređenju sa 3D modelima.

Proučavanje tipičnog preseka na stanici od 75% poluraspona omogućava inženjerima da sa velikom pouzdanošću predvide dinamičku stabilnost letelice. Iako je model geometrijski jednostavan, on sadrži kompletnu fizikalnost aeroelastične sprege, čineći ga nezaobilaznim alatom u preliminarnom projektovanju vazduhoplovnih struktura.

Na uočenom preseku krila aerodinamičku silu uzgona i aerodinamički moment krila, oko aerodinamičkog centra, možemo izraziti u podzvučnom režimu strujanja sledećim relacijama:

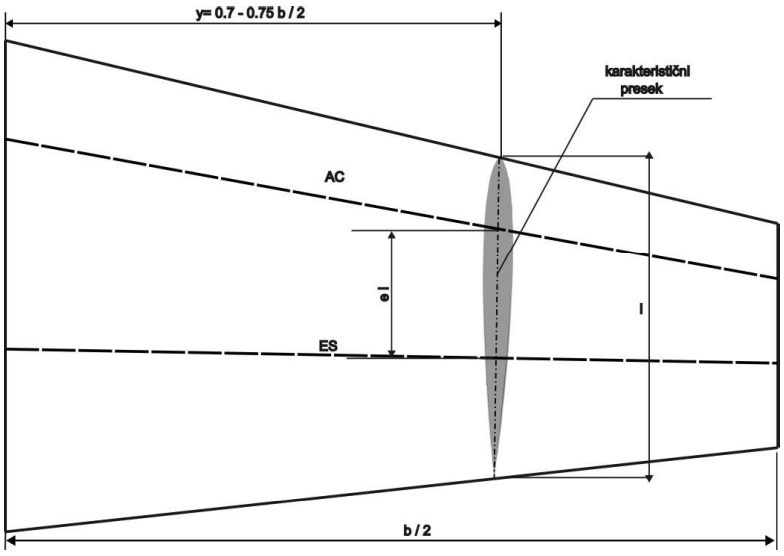
$$R_z = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{dC_z}{d\alpha}\alpha_a S \tag{3.1}$$

$$M_{ac} = \frac{1}{2}\rho V^2 C_{m_{ac}} Sl \tag{3.2}$$

U prethodnim jednačinama:

ρ gustina vazduha	$[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$
V brzina leta	$[\mathrm{m\,s^{-1}}]$
$\frac{dC_z}{d\alpha}$ gradijent uzgona	[-]
α_a aerodinamički napadni ugao	[rad]
S referentna površina krila	$[\mathrm{m^2}]$
c srednja aerodinamička tetiva krila	[m]
e rastojanje između aerodinamičkog centra i elastične ose	[–]
R_z aerodinamička sila normalna na profil (ili tetivu)	[N]
M_{ac} aerodinamički moment oko aerodinamičkog centra	$[\mathrm{N\,m}]$
l tetiva aeroprofila	[m]
$C_{m_{ac}}$ koeficijent momenta za aerodinamički centar	[-]

Model koji se razmatra u ovom poglavlju prvenstveno se odnosi na **tankozidne konstrukcije** tipične za vazduhoplovne strukture poput krila, horizontalnih i vertikalnih stabilizatora, kao i kontrolnih površina. Kod takvih elemenata, torziona (uvijajuća) deformacija dominantno se dešava oko **centra smicanja** (engl. *shear center*) svakog poprečnog preseka. Centar smicanja predstavlja onu tačku u profilu kroz koju mora delovati poprečna sila da ne bi izazvala dodatno uvijanje; u kontekstu elastične linije krila, spojnica svih centara smicanja duž raspona definiše tzv. **elastičnu osu** kao što je prikazano na slici.



Slika 3.2: Metod karakterističnog preseka

S druge strane, aerodinamičko opterećenje — u obliku sile i momenta najčešće se redukuje na **aerodinamički centar** (engl. *aerodynamic center*), što je standardna praksa u linearnoj podzvučnoj aerodinamici. Ključna osobina aerodinamičkog centra jeste da je koeficijent momenta oko te tačke praktično **nezavisan od napadnog ugla** ($dC_m/d\alpha \approx 0$), čime se značajno pojednostavljuje analiza. Za tanke profile u neviskoznom, potencijalnom strujanju, aerodinamički centar se nalazi na približno 25% tetive od napadne ivice.

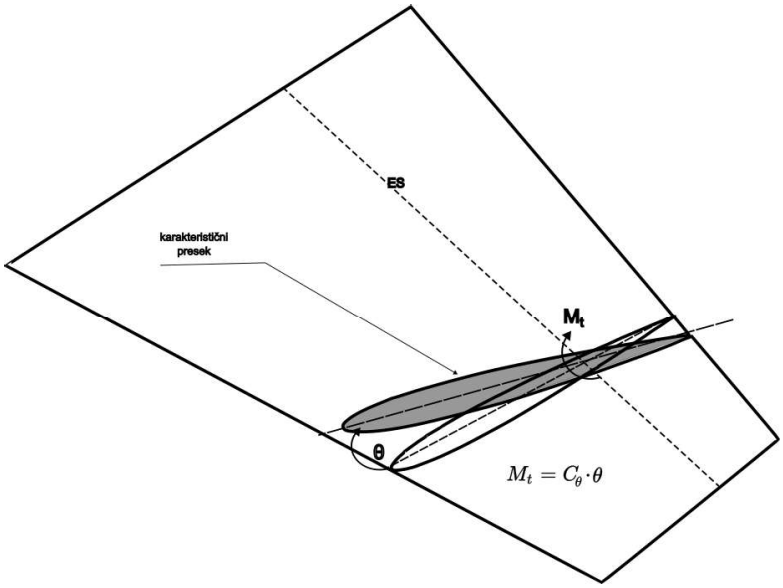
U opštem slučaju, kod tankozidnih struktura **aerodinamički centar i centar smicanja se ne poklapaju**. Posledica toga je da se rezultujuća aerodinamička sila, iako redukovana na aerodinamički centar, stvara dodatni moment jednak proizvodu sile i rastojanja između **AC** i **ES**.

Ovaj moment direktno učestvuje u torzionoj deformaciji krila dok, istovremeno, normalna komponenta aerodinamičke sile izaziva i **savijanje** uzgonske površi, jer deluje van neutralne ose savijanja.

Dakle, realna deformacija krila pod aerodinamičkim opterećenjem uključuje **spregnuti efekat savijanja i uvijanja**, pri čemu je torziona komponenta ključna za pojave poput torzione divergencije. Uvođenje jasne distinkcije između elastične ose (mehanička osobina strukture) i aerodinamičkog centra (aerodinamička referentna tačka) omogućava fizički transparentnu formulaciju aeroelastičnog problema i predstavlja osnovu za dalju linearizovanu analizu stabilnosti.

Sa druge strane, razmatrajući elastične sile, uvodi se pojam Koeficijenta krutosti karakterističnog preseka. Koeficijent krutosti razmatrane površine možemo računski ili eksperimentalno odrediti.

Za linearno elastično krilo moment torzije je proporcionalan uglu uvijanja, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti koeficijent krutosti obeležen kao C_θ što je prikazano relacijom 3.3 i na slici 3.3.



Slika 3.3: Moment torzije krila karakterističnog preseka

$$M_T = C_\theta \cdot \theta \tag{3.3}$$

Prethodna jednačina izražava linearnu vezu između elastičnog torzionog momenta M_T i ugla uvijanja θ. Koeficijent proporcionalnosti C_θ predstavlja torzionu krutost poprečnog preseka krila, odnosno otpornost strukture na uvijanje. Ova relacija je osnova za analizu torzione stabilnosti, posebno u kontekstu torzione divergencije. Iz ove relacije jasno sledi:

$$C_\theta = \frac{M_T}{\theta} \tag{3.4}$$

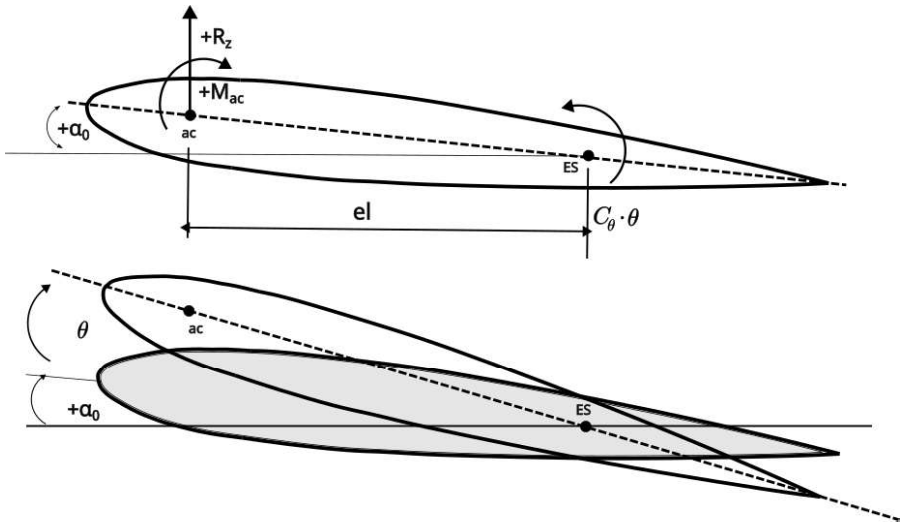
Koeficijent torzione krutosti na mestu karakterističnog preseka je odnos između uvedenog momenta u tom preseku i ugla uvijanja tog istog preseka. Koeficijent torzione krutosti C_θ na mestu karakterističnog preseka definiše se kao odnos između primenjenog (ili unutrašnjeg) torzionog momenta C_{M_T} i rezultujućeg ugla uvijanja θ tog istog preseka.

Sa druge strane, ovaj koeficijent predstavlja meru otpornosti strukture na torzionu deformaciju i zavisi od geometrije preseka, raspodele materijala i mehaničkih osobina (pre svega modula smicanja G).

U kontekstu aeroelastične analize, tačno poznavanje torzione krutosti važno je za određivanje kritične brzine torzione divergencije, jer direktno utiče na stabilnost krila pod aerodinamičkim opterećenjem.

Za karakteristični presek opterećen silom uzgona i aerodinamičkim momentom krila, moment od aerodinamičkog opterećenja oko centra smicanja izaziva uvijanje karakterističnog preseka za ugao $\boldsymbol{\theta}$, a usled njega pojaviće se reaktivni moment od elastičnih sila, proporcionalan ovoj deformaciji $\boldsymbol{C_\theta \cdot \theta}$ koji uspostavlja ravnotežu:

$$C_\theta \cdot \theta = M_{ac} + R_z \cdot (e \cdot l) \tag{3.5}$$



Slika 3.4: Karakteritični presek pod dejstvom aerodinamičkih sila

Pod dejstvom ovih sila, novi efektivni napadni ugao jednak $\boldsymbol{\alpha + \theta}$, gde je α napadni ugao definisan u nedformisanom stanju, a $\boldsymbol{\theta}$ dodatni ugao nastao usled torzione deformacije krila. Kako se taj moment javlja na rastojanju od centra smicanja, on direktno doprinosi daljem uvijanju strukture.

Ovaj mehanizam stvara pozitivnu povratnu spregu:

povećanje $\theta \rightarrow$ povećanje $\alpha_{\text{ef}} = \alpha + \theta \rightarrow$ povećanje $R_z \rightarrow$ povećanje aerodinamičkog momenta $\rightarrow$ dalje povećanje θ. Proces teoretski može dovesti do neograničenog rasta deformacija — tzv. **torzione divergencije**.

U realnosti, proces se zaustavlja u jednom od dva slučaja:

1. dostigne se **ravnotežno stanje**, u kojem elastični restitucioni moment strukture tačno uravnotežuje aerodinamički moment;
2. ili dođe do **strukturalnog otkaza** — loma krila usled prekoračenja granice čvrstoće materijala pod dejstvom prevelikog torzionog momenta.

Stoga, uslov ravnoteže mora se formulisati za **deformisano stanje** konstrukcije, što je ključna razlika u odnosu na klasičnu statiku krutih tela.

Matematički, taj uslov glasi:

$$M_{\text{el}} = M_{\text{aero}},$$

odnosno,

$$C_\theta \theta = \frac{1}{2}\rho V^2 \, C_{m_{ac}} \, S \, l + \frac{1}{2}\rho V^2 \, \frac{dC_z}{d\alpha} \, (\alpha_a + \theta) \, S \, el \tag{3.6}$$

gde je leva strana elastični moment proporcionalan uglu uvijanja, a desna strana ukupni aerodinamički moment redukovan na centar smicanja. Rešavanjem ove jednačine po θ dobija se eksplicitna zavisnost deformacije od brzine leta, a singularnost izraza (imenilac jednak nuli) definiše kritičnu brzinu divergencije V_D.

Karakteristika aeroelastičnih problema je da spoljne aerodinamičko opterećenje nije unapred poznato već je funkcija deformacija strukture, a deformacije strukture su pak zavisne od spoljnjeg opterećenja, pa se preko njihove interakcije nalaze rešenja.

Sređujući predhodnu jednačinu, tako da se veličine koje sadrže nepoznati ugao uvijanja $\boldsymbol{\theta}$ prebace na levu stranu, odnosno

$$\left(C_\theta - \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot \frac{dC_z}{d\alpha} \cdot S \cdot e \cdot l\right) \cdot \theta = \frac{1}{2}\rho V^2 \left(C_{m_{ac}} + \frac{dC_z}{d\alpha} \cdot \alpha_a \cdot e\right) \cdot S \cdot l \tag{3.7}$$

pa se na osnovu prethodne relacije dobija:

$$\theta = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 \left(C_{m_{ac}} + \frac{dC_z}{d\alpha}\,\alpha_a\, e\right) Sl}{C_\theta - \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{dC_z}{d\alpha}\, S\, el} \tag{3.8}$$

S obzirom da krilo nije apsolutno kruto, ovaj elastični ugao uvijanja postojaće uvek tokom leta i menjaće se sa porastom dinamičkog pritiska ili promenom napadnog ugla krila.

Razmatranjem predhodno nađenog izraza za ugao uvijanja, može se primetiti da se u imeniocu od konstante oduzima sve veća i veća veličina kako se povećava dinamički pritisak, tako da imenilac postaje sve manji i manji, usled čega se povećava ugao uvijanja dok ne postane beskonačan, što ne može da izdrži ni jedan materijal. Za brzinu divergencije, uzima se uslov da imenilac postaje jednak nuli, tj. ugao uvijanja postaje beskonačan.

Tako da iz uslova:

$$C_\theta - \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot \frac{dC_z}{d\alpha} \cdot S \cdot e \cdot l = 0 \tag{3.9}$$

se dobija dinamički pritisak pri kome nastaje

$$q_D = \frac{1}{2}\rho V_D^2 = \frac{C_\theta}{\frac{dC_z}{d\alpha}\, S\, e\, l} \tag{3.10}$$

odnosno, definiše se kritična brzina divergencije:

$$V_D = \sqrt{\frac{2 \cdot C_\theta}{\rho \cdot \frac{dC_z}{d\alpha} \cdot S \cdot e \cdot l}} \tag{3.11}$$

U prethodnoj jednačini su:

– V_D - kritična brzina torzione divergencije [m/s]

– C_θ - koeficiejnt krutost poprečnog preseka [N · m/rad]

– ρ - gustina vazduha [kg/m^3]

– $\frac{dC_z}{d\alpha}$ - gradijent uzgona (bezdimenzionalan);

– S - referentna površina krila [m^2]

– e - bezdimenzionalno rastojanje između aerodinamičkog centra i centra smicanja ($e = x_{ES}/l - x_{AC}/l$) [–]

– l - karakteristična dužina (obično srednja aerodinamička tetiva) [m]

3.3 Odredjivanje položaja centra smicanja

Na osnovu jednačine 3.11 jasno je da je između ostalog precizno određivanje položaja centra smicanja (x_{ES}, y_{ES}) predstavlja važan korak u određivanju brzine torziione divergencije metodom karakterističnog preseka. Za tačno određivanje polžaja centra smicanja neophodno je koristiti jednačine iz **teorije elastičnosti tankozidnih struktura**. Ove jednačine osiguravaju da transverzalna sila, koja deluje u centru smicanja, ne izaziva dodatno uvijanje preseka, što je osnovni uslov za tačno modeliranje torzione stabilnosti.

Položaj centra smicanja određuje se rešavanjem sistema jednačina koje izražavaju ravnotežu momenata unutrašnjih smičućih napona po obimu preseka. U opštem slučaju, za otvoreni tankozidni profil, ove jednačine glase:

$$\begin{aligned} I_x\, x_E - I_{xy}\, y_E &= \int_c D_x\, p\, ds, \\ I_{xy}\, x_E - I_y\, y_E &= \int_c D_y\, p\, ds. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Gde su:

– I_x, I_y — momenti inercije preseka u odnosu na glavne ose,

– I_{xy} — centrifugalni moment inercije,

– x_{ES}, y_{ES} — koordinate centra smicanja u odnosu na referentni sistem,

– D_x, D_y — Statički momenti posmatranog preseka,

– p — pol referentnog sistema,

– ds — diferencijalni element duž obima preseka.

Ovaj sistem jednačina omogućava egzaktno određivanje položaja centra smicanja za bilo koji tankozidni profil, bez obzira na njegovu geometrijsku složenost. U praksi, za standardne profile (C-profil, L-profil, aeroprofil, kutija), koriste se pojednostavljene verzije ovih jednačina, ali za preciznu analizu, posebno kod asimetričnih, neophodno je koristiti punu formu iz teorije elastičnosti.

3.3.1 Položaj centra smicanja aeroprofila

Vazduhoplovne strukture poput krila uglavnom se sastoje od oplate, uzdužnika, ramenjača i rebara. Za analizu napona u ovakvim strukturama primenjuje se *Teorija tankozidnih otvorenih i zatvorenih linijskih nosača.* Kod tankozidnih zatvorenih preseka jednoceličnog tipa (što je bazična aproksimacija torzione kutije krila), tangencijalni naponi se posmatraju kroz tok $q(s)$, koji predstavlja proizvod tangencijalnog napona τ i lokalne debljine zida t.

Raspodela tokova usled dejstva vertikalne transverzalne sile V definisana je izrazom:

$$q(s) = q_0 - \frac{V}{I_x} \int_0^s y(s) \cdot t(s)\, ds \tag{3.13}$$

gde je q_0 konstantni (početni) tok u zatvorenom preseku, V ukupna transverzalna sila, I_x glavni aksijalni moment inercije poprečnog preseka, $y(s)$ vertikalna koordinata tačke na konturi, a $t(s)$ lokalna debljina oplate.

Položaj centra smicanja $(x_{\text{sc}}, y_{\text{sc}})$ određuje se iz uslova statičke ravnoteže. Centar smicanja nalazimo iz uslova da je rezultujući moment uvijanja oko te tačke jednak nuli:

$$V \cdot x_{\text{sc}} = \oint q(s) \cdot r(s)\, ds \implies \sum (q \cdot r) = 0 \tag{3.14}$$

Razmotrimo sada nalaženje položaja centra smicanja za poznate i često korištene u praksi NACA serije aeroprofila. Bez obzira na seriju, raspodela poludebljine y_t duž tetive x definisana je standardnom jednačinom:

$$\begin{aligned} y_t = 5t \cdot c \,[&0.2969\sqrt{\frac{x}{c}} - 0.1260\left(\frac{x}{c}\right) - 0.3516\left(\frac{x}{c}\right)^2 \\ &+ 0.2843\left(\frac{x}{c}\right)^3 - 0.1015\left(\frac{x}{c}\right)^4\Big] \end{aligned} \tag{3.15}$$

Razlika između serija leži u matematičkom definisanju srednje linije zakrivljenosti (y_c).

Recimo, kod poznate serije 4 NACA aeroprofila, oznaka NACA $MPXX$ definiše maksimalnu zakrivljenost $(m = M/100)$, poziciju maksimalne zakrivljenosti $(p = P/10)$ i debljinu $(t = XX/100)$. Srednja linija je definisana sistemom parabola:

$$y_c = \begin{cases} \frac{m}{p^2}\left[2p\left(\frac{x}{c}\right) - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right], & 0 \le x \le pc \\ \frac{m}{(1-p)^2}\left[(1-2p) + 2p\left(\frac{x}{c}\right) - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right], & pc \le x \le c \end{cases} \tag{3.16}$$

Slično, za seriju 5 NACA aeroprofila, oznaka NACA $LPXJJ$ (npr. 23012) koristi specifičan sistem oznaka gde prva cifra pomnožena sa 3/2 daje projektovani koeficijent uzgona $(c_l = 0.3)$, naredne dve cifre podeljene sa 2 daju poziciju maksimalne

zakrivljenosti ($p = 15\% = 0.15$), a poslednje dve cifre označavaju maksimalnu debljinu ($t = 0.12$).

Srednja linija zakrivljenosti kod 5-cifrenih profila je specifična jer je pomerena znatno napred. Preko definisanog prelomnog parametra m i konstante k_1, jednačine glase:

$$y_c = \begin{cases} \frac{k_1}{6}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^3 - 3m\left(\frac{x}{c}\right)^2 + m^2(3-m)\left(\frac{x}{c}\right)\right], & 0 \le x \le mc \\ \frac{k_1 m^3}{6}\left[1 - \frac{x}{c}\right], & mc \le x \le c \end{cases} \tag{3.17}$$

Vrednosti za m i k_1 su standardizovane u tabelarnoj formi u zavisnosti od željene pozicije zakrivljenosti p (npr. za poziciju $p = 0.15 \implies m = 0.2025, k_1 = 15.957$).

Određivanje položaja centra smicanja poprečnog preseka oblika aeroprofila, može biti izvedeno kroz nekoliko sukcesivnih koraka:

1. **Diskretizacija i geometrijsko prepoznavanje:** Formira se kontinualni niz tačaka duž tetive c. Na osnovu koordinata gornje (x_u, y_u) i donje (x_l, y_l) konture, i definiše se lokalni nagib srednje linije $\theta = \arctan(dy_c/dx)$.

2. **Objedinjavanje konture i proračun težišta:** Vektori koordinata gornje i donje oplate se spajaju u jedinstvenu zatvorenu petlju. Određuju se koordinate težišta poprečnog preseka $(\bar{x}, \bar{y})$ preko statičkih momenata površine oplate.

3. **Formiranje toka:** Na osnovu vertikalne udaljenosti svakog diskretnog segmenta oplate od neutralne težišne ose, vrši se proračun intenziteta lokalnog toka $(q = y \cdot t)$.

4. **Numerička integracija momenta:** Vrednosti toka se integrale duž zatvorene konture i množe sa krakom momenta u odnosu na napadnu ivicu, odakle se konačno dobija tačna koordinata centra smicanja x_{sc}.

Poređenjem rezultata dobijenih za različite familije aeroprofila, uočavaju se važne konstruktivne razlike uslovljene geometrijom srednje linije.

Kod klasične 4-cifrene serije (npr. NACA 2412), centar smicanja se nalazi znatno iza četvrtine tetive, uglavnom u opsegu $0.36c - 0.38c$, jer postepena zakrivljenost duž celog profila pomera težište i elastičnu osu unazad. Nasuprot tome, kod 5-cifrene serije (npr. NACA 23012), usled zakrivljenosti koja je koncentrisana blizu napadne ivice (15% tetive umesto 40%), zadnji deo profila se ponaša gotovo kao simetrična ploča. To uzrokuje da se centar smicanja kod petocifrenih profila vrati znatno napred, bliže poziciji od $0.28c - 0.31c$.

Ovo napredovanje centra smicanja i elastične ose kod serije 5 čini krila konstrukciono krućim na uvijanje u prednjem delu, što poboljšava stabilnost na flater, ali postavlja specifične zahteve pri dimenzionisanju glavne ramenjače.

Detaljan uporedni pregled za različite geometrije prikazan je u tabeli 3.1.

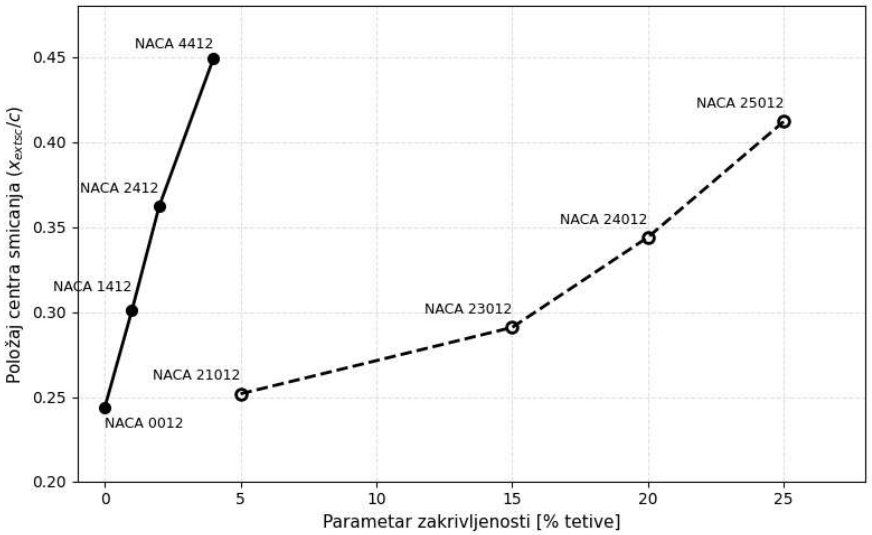
Tabela 3.1: Položaj centra smicanja (x_{sc}/c) za različite aeroprofile

Oznaka / Naziv	**Karakteristika**	$x_{\mathbf{sc}}/c$
NACA 4-cifrena serija		
NACA 0012	Simetrični profil (nula zakr.)	0.244
NACA 1412	Blaga zakr. (1%), na 40% tetive	0.301
NACA 2412	Umerena zakr. (2%), na 40% tetive	0.362
NACA 4412	Visoka zakr. (4%), na 40% tetive	0.449
NACA 2415	Umerena zakr. (2%), debljina 15%	0.360
NACA 5-cifrena serija		
NACA 21012	Zakr. pomerena ekstremno napred (5%)	0.252
NACA 23012	Standardna zakr. serije 5 (15% tet.)	0.291
NACA 23015	Serija 5, povećana debljina (15%)	0.289
NACA 24012	Zakr. pozicionirana na 20% tetive	0.344
NACA 25012	Zakr. pozicionirana na 25% tetive	0.412
Vanserijski profili (Istorijski i Moderni)		
RAF 6	Simetričniji istorijski profil (Prvi sv. rat)	0.315
Clark Y	Profil sa ravnom donjom površinom	0.348
Göttingen 398	Istorijski profil sa visokom zakr.	0.421
Wortmann FX 61-163	Moderni laminarni profil (jedrilice)	0.332
NASA SC(2)-0714	Moderni superkritični (*rear-loading*)	0.395

3.3.2 Uticaj otvora na položaj centra smicanja aeroprofila

U realnim vazduhoplovnim konstrukcijama, rebra se retko izvode kao pune ploče. Radi smanjenja mase i omogućavanja prolaska instalacija, na vertikalnom limu rebra izvode se kružni otvori za olakšanje. Sa stanovišta mehanike tankozidnih nosača, ovi otvori predstavljaju zonu gde je efektivna debljina zida jednaka nuli ($t = 0$), što onemogućava kontinualni tok $q(s)$.

Na mestu otvora, transverzalna sila se ne može preneti preko toka u limu, već se presek lokalno ponaša kao otvoren, a opterećenje preuzimaju gornja i donja prirubnica (flanš) rebra kroz mehanizam sekundarnog savijanja (Virendelov efekat). Usled toga, dolazi do pada lokalne krutosti na smicanje tog dela aeroprofila. Ako raspodela otvora



Slika 3.5: Efikasnosti komandi

duž tetive nije potpuno simetrična, centar smicanja rebra će se pomeriti ka zoni veće krutosti (kontinuiranog lima).

Za inženjersku procenu pomeranja centra smicanja rebra usled prisustva kružnih otvora, uvodi se redukcioni koeficijent krutosti oplate. Ako imamo niz od N kružnih otvora prečnika D_i čija su težišta locirana na rastojanjima x_i od napadne ivice, efektivni položaj centra smicanja oslabljenog rebra ($x_{\text{sc, redukovano}}$) procenjuje se pomoću sledeće poluempirijske korektivne formule:

$$x_{\text{sc, redukovano}} = \frac{x_{\text{sc}} \cdot I_x - \sum_{i=1}^{N} \eta_i \cdot x_i \cdot A_{\text{otvora, } i} \cdot y_i^2}{I_x - \sum_{i=1}^{N} \eta_i \cdot A_{\text{otvora, } i} \cdot y_i^2} \tag{3.18}$$

pri čemu su oznake:

– x_{sc} - prvobitni položaj centra smicanja punog aeroprofila (bez otvora) u odnosu na napadnu ivicu,

– I_x - aksijalni moment inercije punog poprečnog preseka aeroprofila,

– $A_{\text{otvora, } i} = \frac{\pi D_i^2}{4} \cdot t$ - fiktivna redukcija površine (gde je t debljina lima rebra, a D_i prečnik i-tog otvora),

– x_i, y_i - koordinate centra i-tog kružnog otvora u odnosu na napadnu ivicu i težišnu osu,

– η_i - koeficijent forme otvora koji uzima u obzir konstruktivno izvođenje i efekat porubljenosti ivica:

$$\eta_i = \begin{cases} 1.0, & \text{za običan otvor sa oštrim ivicama (maksimalno slabljenje)} \\ 0.3 - 0.5, & \text{za otvor sa podvijenom prirubnicom (\textit{flanged hole})} \end{cases}$$

U praksi, duž rebra se najčešće postavlja niz sukcesivnih kružnih otvora čiji se prečnici menjaju prateći promenu lokalne visine aeroprofila. Posmatrajmo slučaj rebra sa tri kružna otvora ($N = 3$) raspoređena duž tetive:

1. **Otvor 1 (Prednji):** Smešten blizu napadne ivice, na poziciji x_1, prečnika D_1.
2. **Otvor 2 (Srednji):** Smešten u zoni maksimalne debljine aeroprofila, na poziciji x_2, prečnika D_2.
3. **Otvor 3 (Zadnji):** Smešten bliže izlaznoj ivici, na poziciji x_3, prečnika D_3.

U ovom slučaju, korektivna formula se razvija u eksplicitni oblik:

$$x_{\text{sc, redukovano}} = \frac{x_{\text{sc}} \cdot I_x - [\eta_1 x_1 A_1 y_1^2 + \eta_2 x_2 A_2 y_2^2 + \eta_3 x_3 A_3 y_3^2]}{I_x - [\eta_1 A_1 y_1^2 + \eta_2 A_2 y_2^2 + \eta_3 A_3 y_3^2]} \tag{3.19}$$

Zavisno od konstruktivnih zahteva i gradijenta prečnika otvora, javljaju se dva karakteristična strukturalna odgovora rebra:

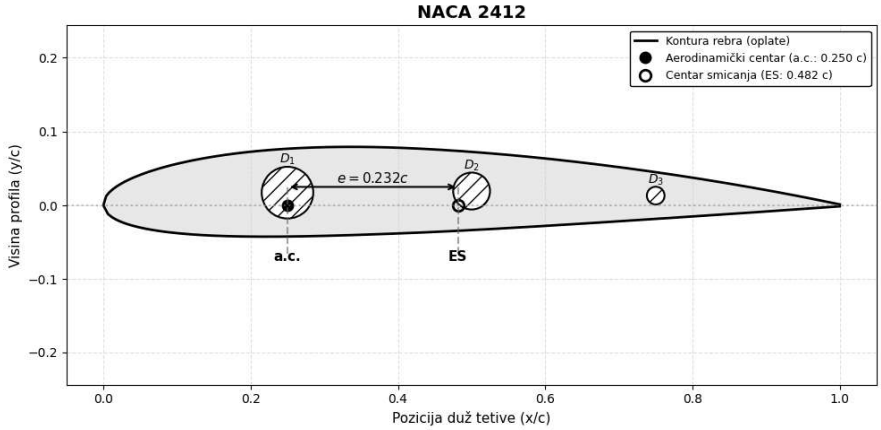
– **Konstrukcija sa opadajućim prečnicima ($D_1 > D_2 > D_3$):** Kada su najveći otvori koncentrisani napred (usled prolaska glavnih instalacionih snopova), prednji deo rebra gubi znatno više krutosti na smicanje u odnosu na zadnji. U tom scenariju, član u imenitelju drastično smanjuje ukupnu krutost prednjeg dela, što rezultuje **pomeranjem centra smicanja unazad**, prema izlaznoj ivici.

– **Konstrukcija sa rastućim prečnicima ($D_1 < D_2 < D_3$):** Ovaj raspored je znatno češći jer prati prirodno sužavanje visine profila i smanjenje intenziteta vertikalnih unutrašnjih sila. Pošto je najveći otvor (D_3) postavljen na najvećem rastojanju x_3, proizvod u zagradi brojitelja postaje veoma veliki. Oduzimanjem ovog člana, vrednost $x_{\text{sc, redukovano}}$ opada, što uzrokuje **snažno pomeranje centra smicanja unapred**, prema napadnoj ivici.

Ova analiza pokazuje da se svesnim odabirom pozicija, prečnika i načina porubljivanja (η_i) otvora za olakšanje može upravljati hodom elastične ose rebra i krila, primoravajući je da se približi aerodinamičkom centru, čime se sekundarni torzioni momenti uvijanja svode na minimum.

3.4 Određivanje torzione krutosti u analizi divergencije krila

Takođe, u analizi brzine divergencije krila, koeficijent torzione krutosti predstavlja jedan od ključnih parametara koji karakteriše otpornost krila na uvijanje pod dejstvom aerodinamičkih opterećenja. Ovaj koeficijent se može odrediti pomoću različitih metoda, od kojih je svaka prilagođena različitim konfiguracijama krila i analitičkim zahtevima. U daljem tekstu istražuju tri različita pristupa:



Slika 3.6: Položaj centra smicanja aeroprofila sa otvorima

1. Analitičko izvođenje za pojednostavljene konfiguracije krila
2. Eksperimentalno merenje kroz fizičko testiranje
3. Numeričko određivanje metodom konačnih elemenata

Zajedno, ove metode pružaju sveobuhvatan okvir za tačno određivanje torzione krutosti, čime se obezbeđuje pouzdanost u određivanju kritične brzine torzione divergencije.

3.4.1 Analitičko određivanje torzione krutosti

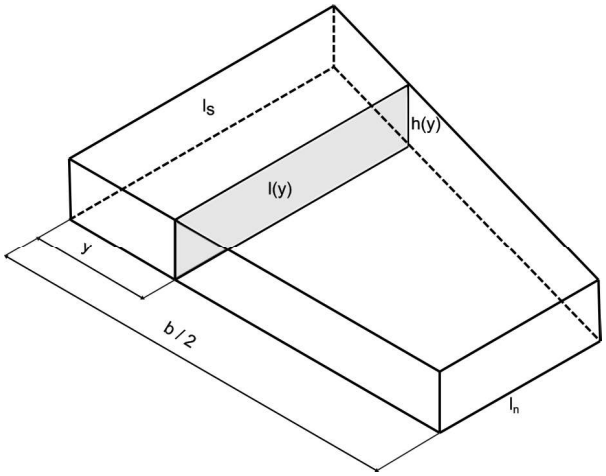
U tipičnim konstrukcijama krila, zidovi ramenjača, oplate krila i rebra, formiraju strukturnu konfiguraciju koja je centralna za otpornost krila na torziona opterećenja. Ova konfiguracija, često nazvana **torziona kutija**, ima ključnu ulogu u održavanju aeroelastične stabilnosti, jer efikasno raspoređuje naprezanja izazvana aerodinamičkim silama. Jednačine predstavljene u ovom poglavlju fokusiraju se na kvantifikovanje doprinosa zidova ramenjača i oplate krila, čime se obezbeđuje tačno predstavljanje torzione krutosti koje je ključno za predviđanje brzine divergencije krila. Uključivanjem ovih primarnih strukturnih elemenata, analitički okvir pruža precizno razumevanje otpornosti krila na torzione deformacije.

Torziona konstanta, u opštem slučaju obeležavana sa J za jednu zatvorenu ćeliju što je tipično za konstrukciju krila, koja se sastoji od oplata (gornje i donje) i zidova ramenjača, može se odrediti se dobro poznatom Bredt-Batho formulom:

$$J(y) = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{t}} \tag{3.20}$$

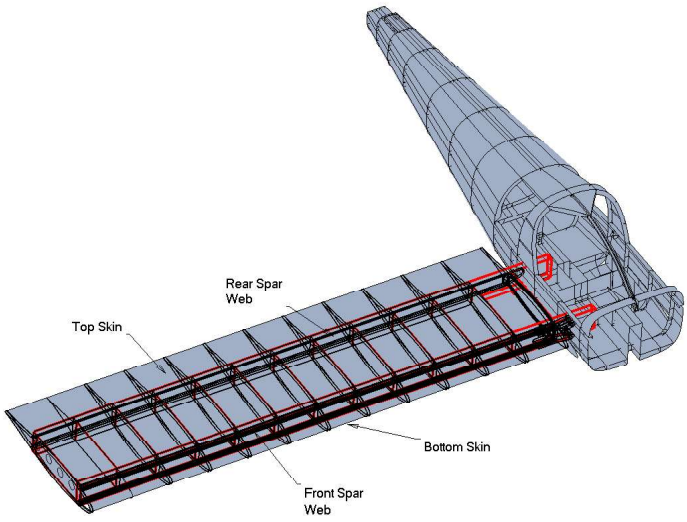
U prethodnoj jednačini, **A** označava površinu oivičenu ćelijom, a **t** predstavlja debljinu svakog dela. Veza između ugla uvijanja i primenjenog momenta,

Analitičko određivanje koeficijenta torzione krutosti pruža pouzdan pristup za procenu torzione krutosti struktura krila. Fokusiranjem na zidove ramenjača i oplatu



Slika 3.7: Torziona kutija

krila, ova metoda ističe ključnu ulogu torzione kutije u suprotstavljanju silama koje izazivaju uvijanje. Za metalne materijale, kao što je aluminijum, modul smicanja je dobro dokumentovan, što olakšava izračunavanja. Međutim, za kompozitne materijale, ekvivalentni modul smicanja uvodi dodatnu složenost zbog zavisnosti od faktora kao što su orijentacija vlakana i raspored slojeva. Ove napomene ističu važnost prilagođavanja analitičkog okvira konkretnim materijalima i konfiguracijama koje se proučavaju, kako bi se obezbedili tačni i pouzdani rezultati.



Slika 3.8: Torziona kutija krila sa označenim elementima

3.4.2 Eksperimentalni pristup određivanja torzione krutosti

Da bi se eksperimentalno procenila torziona krutost struktura krila, koristi se specijalizovani uređaj koji primenjuje kontrolisani torzioni moment na mestu karakte-

rističnog preseka. Ovaj uređaj, kao što je prikazano na slici, sastoji se od dve jednake i suprotno usmerene sile koje se uvode na različitim mestima duž tetive obično na prednjoj i zadnjoj ivici vrha krila. Sa krilom čvrsto fiksiranim u korenu, primenjeni par sila izaziva torzioni moment oko ose u pravcu raspona, što rezultuje merljivim deformacijama. Merenjem ugla uvijanja na poznatoj dužini krila i sa poznatim momentom, torziona krutost **GJ** može se tačno odrediti pomoću linearno elastičnih relacija.

Merenjem pomeranja prednje i zadnje ivice, ugao uvijanja može se odrediti pomoću jednostavnog geometrijskog odnosa. S obzirom da je primenjeni moment poznat, a ugao uvijanja izmeren, koeficijent torzione krutosti može biti izračunat.

$$\theta = \frac{D_{LE} + D_{TE}}{L_S} \tag{3.21}$$

3.4.3 Određivanje torzione krutosti metodom konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata (FEA - Finite Element Analysis) pruža robusnu i prilagodljivu simulacionu metodologiju za procenu torzione krutosti, pri čemu efikasno replikuje eksperimentalni postupak ranije opisan. Formiranjem numeričkog modela krila, sa jasno definisanim strukturnim elementima i osobinama materijala, simulacija verno odslikava uslove fizičkog testiranja. Konturni uslovi se primenjuju na korenu krila, dok se par sila uvodi na vrhu krila radi simulacije torzionog opterećenja.

Izlazni rezultati FEA-a, uključujući pomeranja čvorova i rotacije, omogućavaju izračunavanje ugla uvijanja na određenim presecima krila. Taj ugao uvijanja predstavlja osnovu za određivanje koeficijenta torzijske krutosti, koristeći istu formulaciju kao u eksperimentalnom testiranju. Računarski modeli nude značajne prednosti, omogućavajući predviđanje torzionog ponašanja različitih kombinacija materijala i geometrijskih konfiguracija, uz istovremeno smanjenje potrebnih resursa u odnosu na fizičko testiranje.

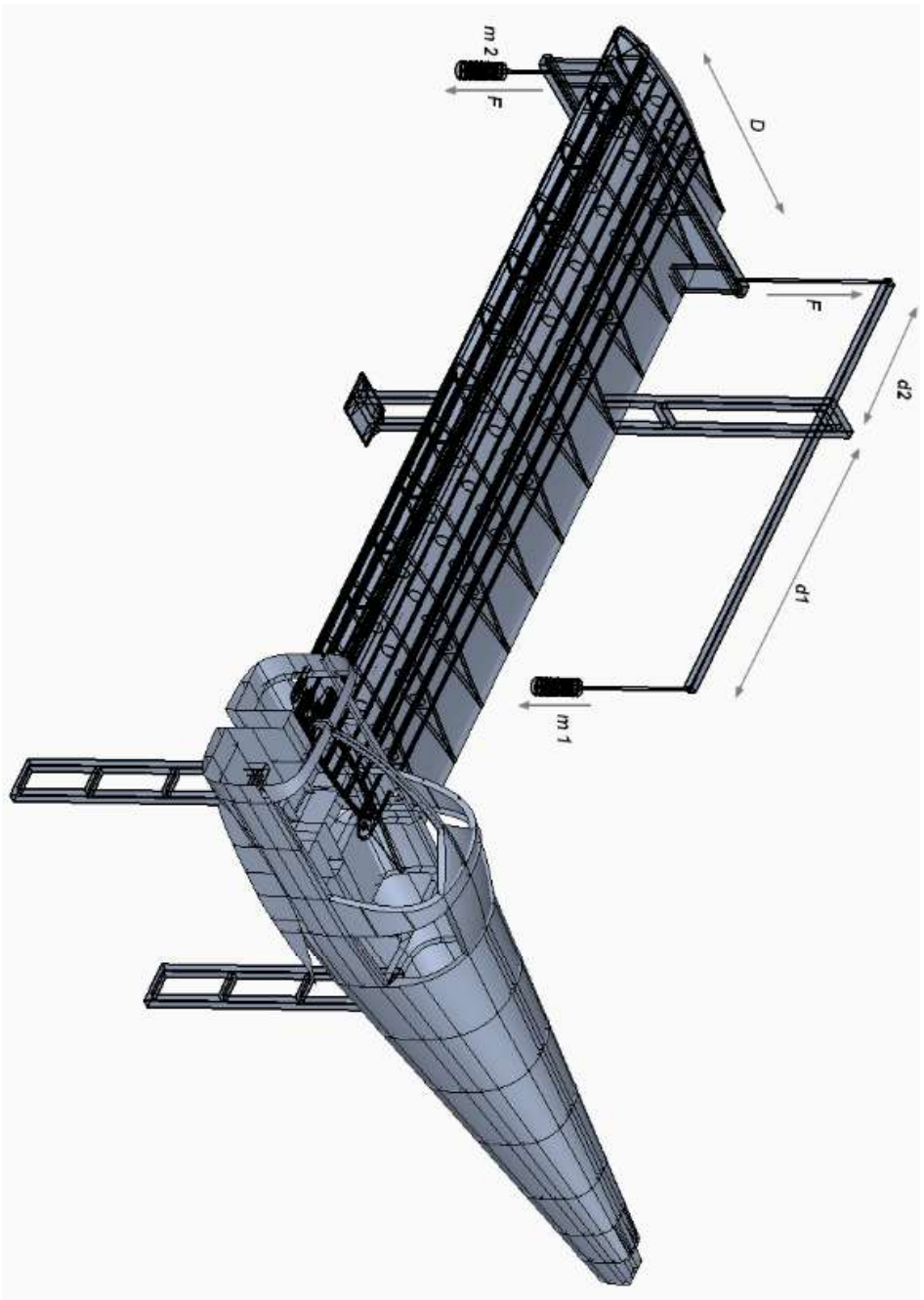
Da bi se dodatno poboljšala tačnost i pouzdanost rezultata simulacije, preporučuje se korišćenje RBE (Rigid Body Elements elementi krutog tela). Ovi elementi efikasno raspoređuju primenjeni torzioni moment, smanjujući koncentracije napona na mestima uvođenja opterećenja.

Priložena vizualizacija prikazuje FEA model, ističući podatke o rotaciji neophodne za procenu torzionog ponašanja strukture krila. Ova analiza pruža precizan put za dobijanje koeficijenta torzijske krutosti za posmatrani presek

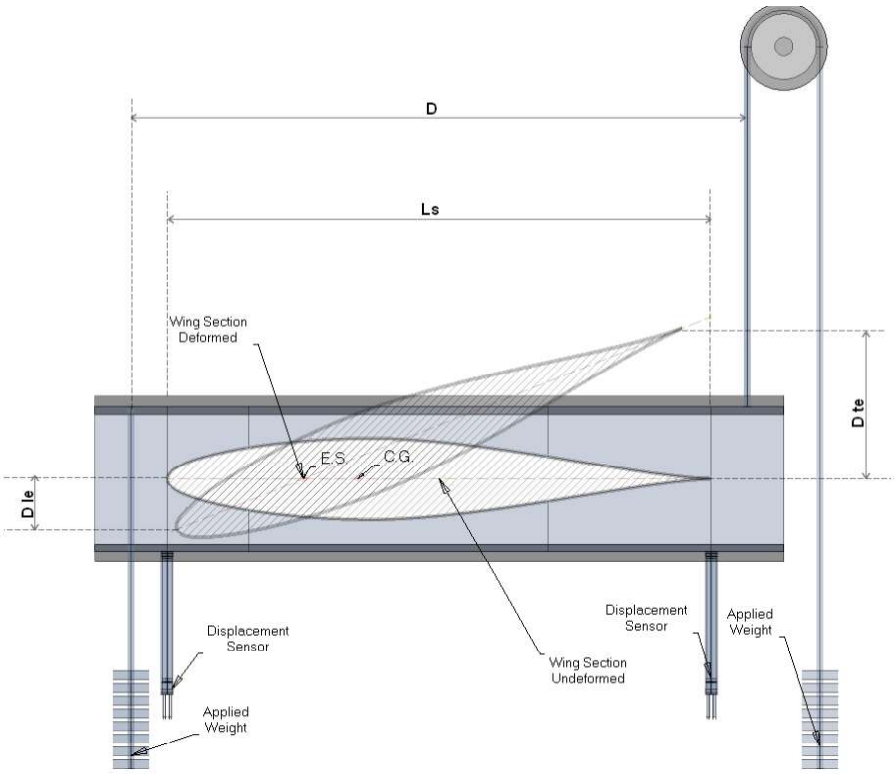
3.5 Efektivna torziona dužina krila

U izrazu za brzinu torzione divergencije pojavljuje se torziona krutost krila

$$C_\theta = \frac{GJ}{L_t}, \tag{3.22}$$



Slika 3.9: Merenje torzione krutosti



Slika 3.10: Uređaj za merenje torzione krutosti

gde je GJ torziona krutost preseka, a L_t efektivna torziona dužina krila. Uvrštavanjem u izraz za divergenciju dobija se

$$V_D = \sqrt{\frac{2GJ}{\rho Sla\left(\frac{dC_z}{d\alpha}\right)L_t}}. \tag{3.23}$$

Iz ove relacije jasno se vidi da je brzina divergencije obrnuto proporcionalna kvadratnom korenu efektivne torzione dužine:

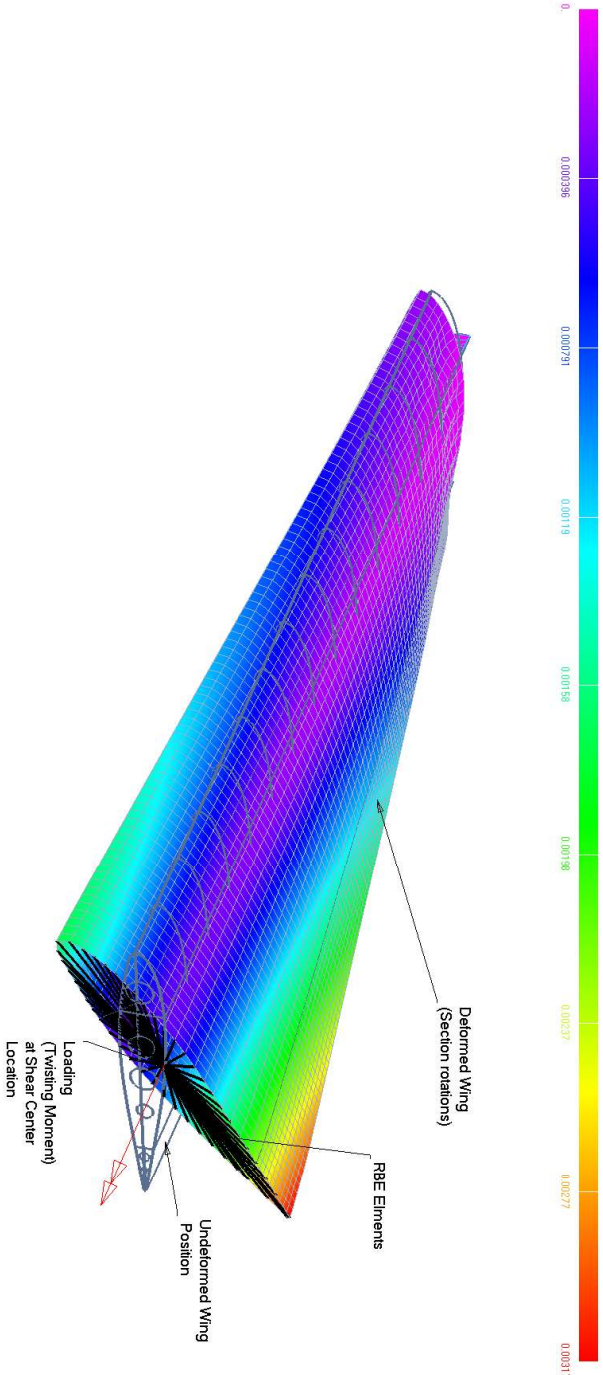
$$V_D \propto \frac{1}{\sqrt{L_t}}. \tag{3.24}$$

Efektivna torziona dužina L_t predstavlja dužinu idealizovanog torzionog štapa koji daje isto uvijanje kao realno krilo za posmatrano opterećenje. Za razliku od geometrijskog raspona krila b, koji zavisi samo od planforme, L_t zavisi od raspodele torzionog momenta, raspodele torzione krutosti i konstruktivnih oslonaca duž raspona.

Konzolno krilo konstantnog preseka

Za konzolno krilo približno konstantne torzione krutosti ($GJ = \text{const}$) uvijanje je najveće na vrhu polukrila. U tom slučaju efektivna torziona dužina se može aproksimirati polurasponom:

$$L_t \approx \frac{b}{2}. \tag{3.25}$$



Slika 3.11: Određivanje torzione krutosti metodom konačnih elemenata

Ova aproksimacija predstavlja osnovni model torzione divergencije i koristi se u većini analitičkih proračuna.

Uticaj raspodele torzionog momenta

Realni torzioni moment nije konstantan duž raspona, već opada od maksimuma u korenu ka nuli na vrhu. Zbog toga je efektivna torziona dužina obično nešto manja od geometrijskog poluraspona. U praksi se često uvodi korekcioni faktor

$$L_t \approx \gamma \frac{b}{2}, \qquad 0.6 \lesssim \gamma \lesssim 0.9. \tag{3.26}$$

Tipične vrednosti su:

– $\gamma \approx 0.7$ — izraženo opadanje opterećenja ka vrhu,

– $\gamma \approx 0.8$ — neutralna procena,

– $\gamma \approx 1.0$ — konzervativna procena (maksimalno uvijanje).

Krila promenljivog preseka

Kod trapeznih ili tankih krila torziona krutost opada prema vrhu, tj. $GJ = GJ(y)$. Efektivna torziona dužina može se tada definisati iz jednakosti uvijanja realnog krila i ekvivalentnog torzionog štapa:

$$\theta(\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} \frac{T(y)}{GJ(y)}\, dy = \frac{T_{\text{ref}} L_t}{(GJ)_{\text{ref}}}. \tag{3.27}$$

Odavde sledi

$$L_t = \frac{(GJ)_{\text{ref}}}{T_{\text{ref}}} \int_0^{\bar{y}} \frac{T(y)}{GJ(y)}\, dy. \tag{3.28}$$

Ovaj pristup daje najrealniji ekvivalent za krila promenljive krutosti.

Krila sa dodatnim osloncima ili torzionim kutijama

Ako krilo ima dodatne oslonce (npr. konfiguracije krila sa upornicama), efektivna torziona dužina se smanjuje i približno odgovara rastojanju do stanice oslonca ili završetka krute zone:

$$L_t \approx y_s. \tag{3.29}$$

Tipično važi

$$L_t \approx 0.3\text{–}0.6\, \frac{b}{2}.$$

Efektivna torziona dužina L_t predstavlja globalni parametar torzione krutosti krila i direktno utiče na brzinu divergencije.Za većinu analitičkih proračuna divergencije mogu se koristiti sledeće aproksimacije:

– $L_t = b/2$ — osnovni model konzolnog krila,

– $L_t = 0.7$–$0.9\,b/2$ — realnije krilo sa raspodeljenim opterećenjem,

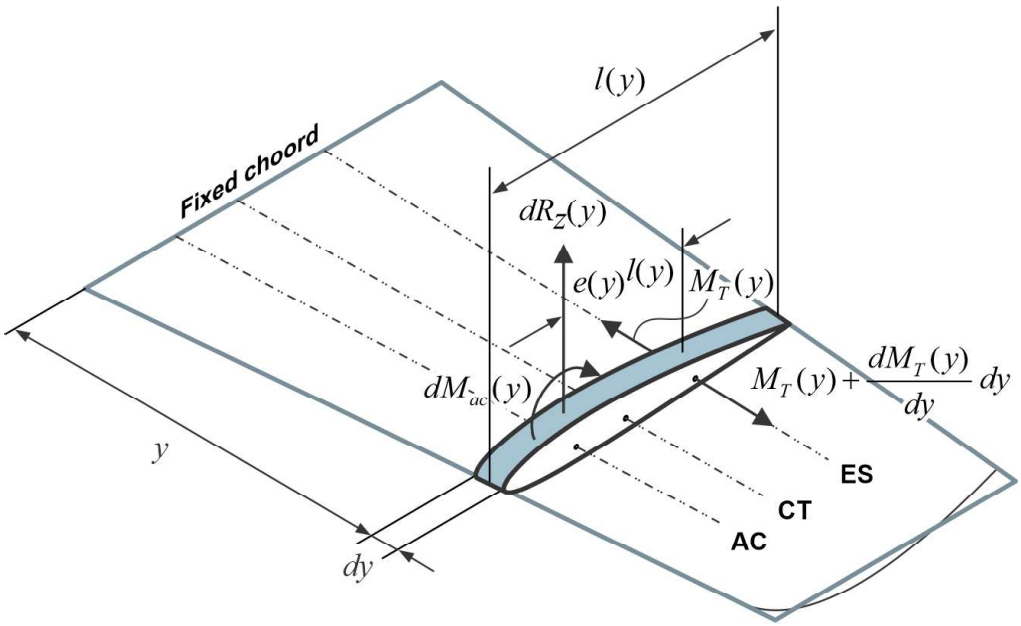
– $L_t = y_s$ — krilo sa dodatnim osloncem ili lokalnom torzionom kutijom.

Napomena. U analizi lokalnih aeroelastičnih pojava, kao što je revers krilca, relevantna torziona dužina može biti ograničena na zonu krilca. U ovom poglavlju L_t predstavlja globalnu torzionu dužinu krila relevantnu za pojavu divergencije.

Tabela 3.2: Tipične vrednosti efektivne torzione dužine L_t za proračun divergencije.

Klasa letelice	**Strukturna karakteristika**	γ	**Preporuka za zadatke**
UAV (mali/srednji)	Relativno kruto krilo, često kompozitna torziona kutija, umeren taper	0.7–0.9	$L_t \approx 0.8\,b/2$
Jedrilica	Vrlo velik raspon, tanak profil, izražen taper i opadanje GJ ka vrhu	0.8–1.0	$L_t \approx 0.9\,b/2$ do $b/2$
STOL / visokokrilni avion	Velik raspon, tanje krilo, opterećenje bliže vrhu, umerena torziona krutost	0.8–0.95	$L_t \approx 0.9\,b/2$
GA avion (npr. Cessna 172)	Klasično Al krilo sa ramenjačama, umeren raspon i opadanje krutosti ka vrhu	0.7–0.85	$L_t \approx 0.75\,b/2$
Regionalni turboprop	Veći raspon od GA, tanje krilo, izražen taper, srednja torziona krutost	0.65–0.8	$L_t \approx 0.7\,b/2$
Transportni avion	Debelo krilo pri korenu, jaka torziona kutija, opterećenje koncentrisano bliže korenu	0.6–0.8	$L_t \approx 0.7\,b/2$
Poslovni mlaznjak	Relativno kruto, tanko krilo, manji raspon i jaka torziona kutija	0.6–0.75	$L_t \approx 0.65\,b/2$
Lovački avion	Kratko, debelo i veoma kruto krilo, mala promena GJ duž raspona	0.5–0.7	$L_t \approx 0.6\,b/2$

Iz tabele 3.2 se vidi jasan trend: što je krilo kraće i torziono krutije, to je efektivna torziona dužina manja (manji γ). Suprotno tome, duga i tanka krila imaju veću efektivnu torzionu dužinu.



Slika 3.12: 3D Krilo

3.6 Određivanje brzine torzione divergencije 3D krila

Posmatra se krilo koje ima promenljive aerodinamičke i geometrijske parametre duž polurazmaha.

Na diferencijalni **dy** element površine krila deluje u aerodinamičkom centru tog preseka diferencijlna sila uzgona:

$$dR_z(y) = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{dC_z(y)}{d\alpha} \cdot [\alpha_a(y) + \theta(y)] \cdot l(y) \cdot dy \tag{3.30}$$

odnosno diferencijalna veličina aerodinamičkog momenta:

$$dM_{ac}(y) = \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot C_{mac}(y) \cdot l(y) \cdot dy \cdot l(y) \tag{3.31}$$

Na elementarni deo krila, s jedne strane, na mestu centra smicanja toga preseka deluje moment torzije od unutrašnjih sila, dok s druge strane moment torzije sa odgovarajućim priraštajem:

$$M_T(y) + \frac{dM_T(y)}{dy}\, dy\,. \tag{3.32}$$

Uslov ravnoteže momenata torzije oko elastične ose razmatranog elementa krila je:

$$M_T(y)+\frac{dM_T(y)}{dy}\cdot dy - M_T(y)+dR_z(y)\cdot e(y)\cdot l(y)+dM_{ac}(y)-n\cdot g(y)\cdot h(y)\cdot dy = 0 \tag{3.33}$$

pri čemu je naglašeno koje sve veličine se smatraju funkcijama koordinate. Zamenjući definisane izraze za aerodinamičku silu i moment u predhodni izraz, posle sređivanja dobija se:

$$\frac{dM_T(y)}{dy}+\frac{1}{2}\rho V^2\cdot\frac{dC_z(y)}{d\alpha}\cdot[\alpha(y)+\theta(y)]\cdot e(y)\cdot l^2(y)+\frac{1}{2}\rho V^2 C_{mac}(y)\cdot l^2(y)=0 \tag{3.34}$$

A na osnovu relacije,

$$\frac{d\theta}{dy}=\frac{M_T}{GJ} \tag{3.35}$$

može se moment torzije izraziti u obliku:

$$M_T=GJ\cdot\frac{d\theta}{dy} \tag{3.36}$$

Vodeći računa koje su sve veličine funkcije od **y**', diferenciranjem dobija se:

$$\frac{dM_T}{dy}=\frac{d}{dy}\left(GJ\cdot\frac{d\theta}{dy}\right)=GJ(y)\cdot\frac{d^2\theta}{dy^2}+\frac{d\theta}{dy}\cdot\frac{d}{dy}(GJ(y)) \tag{3.37}$$

Uslov ravnoteže momenata oko centra smicanja, koji deluju na elementarni deo krila, konačno se dobija u obliku,

$$\begin{aligned}&[GJ(y)]\cdot\frac{d^2\theta}{dy^2}+\left[\frac{d}{dy}(GJ(y))\right]\cdot\frac{d\theta}{dy}\\&+\left[\frac{1}{2}\rho V^2\cdot\frac{dC_z(y)}{d\alpha}\cdot l^2(y)\cdot e(y)\right]\cdot\theta\\&=-\frac{1}{2}\rho V^2\frac{dC_z(y)}{d\alpha}\cdot\alpha(y)\cdot l^2(y)\cdot e(y)\\&-\frac{1}{2}\rho V^2 C_{mac}(y)\cdot l^2(y)\end{aligned} \tag{3.38}$$

nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda sa promenljivim koeficijentima.

3.6.1 Galerkinova metoda za rešavanje jednačine torzione divergencije 3D krila

Galerkinova metoda je varijaciona tehnika koja se koristi za približno rešavanje diferencijalnih jednačina, posebno onih sa promenljivim koeficijentima poput prethodne jednačine. Data diferencijalna jednačina je oblika:

$$A(y)\frac{d^2\theta}{dy^2}+B(y)\frac{d\theta}{dy}+C(y)\theta=D(y), \tag{3.39}$$

gde su:

– $A(y)=GJ(y)$,

– $B(y) = \frac{d}{dy}\left[GJ(y)\right]$,

– $C(y) = \frac{1}{2}\rho V^2 \cdot \frac{dC_z(y)}{d\alpha} \cdot l^2(y) \cdot e(y)$,

– $D(y) = -\frac{1}{2}\rho V^2 \frac{dC_z(y)}{d\alpha} \cdot \alpha(y) \cdot l^2(y) \cdot e(y) - \frac{1}{2}\rho V^2 C_{mac}(y) \cdot l^2(y) + n \cdot g(y) \cdot h(y)$.

Pretpostavljamo da se jednačina rešava na domenu $y \in [0, L]$, sa odgovarajućim graničnim uslovima (npr. $\theta(0) = 0$, $\theta'(L) = 0$ ili sličnim, zavisno od problema).

Koraci u Galerkinovoj metodi

1. **Izbor baznih funkcija:** Približno rešenje $\theta(y)$ se predstavlja kao linearna kombinacija baznih funkcija $\phi_i(y)$, koje zadovoljavaju granične uslove:

$$\theta(y) \approx \hat{\theta}(y) = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(y), \tag{3.40}$$

gde su a_i nepoznati koeficijenti, a $\phi_i(y)$ su odabrane funkcije (npr. polinomi, trigonometrijske funkcije ili modovi sopstvenih oscilacija, poput $\phi_i(y) = \sin\left(\frac{i\pi y}{L}\right)$).

2. **Formiranje reziduala:** Uvrštavanjem približnog rešenja u originalnu jednačinu dobijamo ostatak $R(y)$:

$$R(y) = A(y)\frac{d^2\hat{\theta}}{dy^2} + B(y)\frac{d\hat{\theta}}{dy} + C(y)\hat{\theta} - D(y). \tag{3.41}$$

OStatak nije jednak nuli jer je rešenje približno.

3. **Ponderisana integracija ostataka:** U Galerkinovoj metodi, merne funkcije su iste kao bazne, tj. $\psi_j(y) = \phi_j(y)$. Zahtevamo da integral ponderisanog oststka bude nula za svaku mernu funkciju:

$$\int_0^L R(y)\phi_j(y)\, dy = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.42}$$

Ovim se dobija sistem od N jednačina.

4. **Razvijanje sistema jednačina:** Uvrštavanjem izraza za $\hat{\theta}(y)$, integral postaje:

$$\int_0^L \left[A(y)\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d^2\phi_i}{dy^2} + B(y)\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d\phi_i}{dy} + C(y)\sum_{i=1}^{N} a_i\phi_i - D(y)\right]\phi_j(y)\, dy = 0. \tag{3.43}$$

Što se može prikazati u matričnom obliku:

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{f}, \tag{3.44}$$

pri čemu su elementi matrice $\mathbf{K}$ i vektora $\mathbf{f}$:

$$K_{ji} = \int_0^L \left[A(y)\frac{d^2\phi_i}{dy^2}\phi_j(y) + B(y)\frac{d\phi_i}{dy}\phi_j(y) + C(y)\phi_i(y)\phi_j(y) \right] dy, \tag{3.45}$$

$$f_j = \int_0^L D(y)\phi_j(y)\, dy. \tag{3.46}$$

5. **Rešavanje sistema:** Rešava se linearni sistem za koeficijente a_i, koristeći numeričke metode (npr. Gaussova eliminacija).

6. **Konstrukcija rešenja:** Konačno se dobija približno rešenje $\hat{\theta}(y) = \sum_{i=1}^{N} a_i\phi_i(y)$. Preciznost se poboljšava povećanjem N.

Funkcije i implementacija

- **Bazne funkcije** $\phi_i(y)$**:** Moraju zadovoljavati granične uslove. Za torziju krila, često se koriste modovi poput $\phi_i(y) = \left(\frac{y}{L}\right)^{i+1}$ ili sinusne funkcije.
- **Numerička integracija:** Integrali se računaju numerički (npr. trapezno pravilo ili Gaussova kvadratura) ako koeficijenti nisu konstantni.
- **Varijacije:** Za probleme sa sopstvenim vrednostima (npr. flutter analiza), metoda se modifikuje da uključi sopstvene frekvencije.

Ova metoda je posebno korisna za probleme sa promenljivim presekom, kao što je analizirana jednačina brzine divergencije u ovom slučaju.

3.7 Numerički pristup određivanju kritične brzine divergencije

Pored analitičkih i poluanalitičkih metoda, kritična brzina divergencije može se određivati i potpuno numeričkim postupkom zasnovanim na spregnutoj strukturno-aerodinamičkoj analizi. U ovom pristupu krilo se ne svodi na jedan karakteristični presek, niti se deformaciono polje unapred pretpostavlja pomoću izabranih aproksimacionih funkcija, već se geometrija, raspodela krutosti i aerodinamičko opterećenje diskretizuju u prostoru.

Osnovna ideja numeričkog aeroelastičnog modela jeste formiranje dva međusobno povezana diskretna sistema:

- strukturnog modela, kojim se opisuje elastično ponašanje konstrukcije;
- aerodinamičkog modela, kojim se opisuje raspodela aerodinamičkih opterećenja po nosećoj površini.

Pošto se strukturna i aerodinamička diskretizacija uglavnom ne poklapaju, neophodno je uvesti interpolacioni mehanizam kojim se pomeranja konstrukcije prenose na

aerodinamičku mrežu, dok se aerodinamičke sile prenose nazad na strukturne čvorove. Na taj način formira se zatvoren aeroelastični sistem u kome deformacija konstrukcije menja aerodinamičko opterećenje, a izmenjeno aerodinamičko opterećenje dodatno deformiše konstrukciju.

Ovaj pristup je posebno značajan zato što omogućava da se problem divergencije posmatra kao problem gubitka statičke stabilnosti celokupnog diskretnog sistema, a ne samo kao lokalna ravnoteža jednog karakterističnog preseka. Drugim rečima, numerički model ne traži unapred poznatu formu uvijanja krila, već dozvoljava da se oblik aeroelastične deformacije pojavi kao rezultat interakcije strukturne krutosti, aerodinamičkih uticaja i graničnih uslova.

Osnovna jednačina statičke aeroelastične ravnoteže

U statičkoj aeroelastičnosti razmatra se ravnoteža između elastičnih sila konstrukcije i aerodinamičkih sila koje zavise od deformisanog oblika krila. U diskretnom obliku, jednačina ravnoteže može se zapisati kao

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_0. \tag{3.47}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}$ je globalna matrica strukturne krutosti;

– $\mathbf{u}$ je vektor generalisanih pomeranja konstrukcije;

– $\mathbf{F}_a$ je vektor aerodinamičkih sila;

– $\mathbf{F}_0$ je vektor spoljašnjih neaerodinamičkih opterećenja.

U linearizovanom statičkom aeroelastičnom problemu aerodinamičke sile mogu se predstaviti u obliku

$$\mathbf{F}_a = q\mathbf{Q}\mathbf{u} + q\mathbf{f}_\alpha. \tag{3.48}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{F}_a$ je vektor aerodinamičkih sila;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}$ je matrica aerodinamičke krutosti;

– $\mathbf{u}$ je vektor generalisanih pomeranja konstrukcije;

– $\mathbf{f}_\alpha$ je vektor aerodinamičkog opterećenja usled zadatog ugla napada ili trim uslova.

Dinamički pritisak definisan je izrazom

$$q = \frac{1}{2}\rho V^2. \tag{3.49}$$

U ovoj jednačini:

– q je dinamički pritisak;

– ρ je gustina fluida;

– V je brzina leta.

Na osnovu prethodnog dobija se:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = q\mathbf{Q}\mathbf{u} + q\mathbf{f}_\alpha + \mathbf{F}_0. \tag{3.50}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}$ je globalna matrica strukturne krutosti;

– $\mathbf{u}$ je vektor generalisanih pomeranja konstrukcije;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}$ je matrica aerodinamičke krutosti;

– $\mathbf{f}_\alpha$ je vektor aerodinamičkog opterećenja usled napadnog ugla;

– $\mathbf{F}_0$ je vektor spoljašnjih neaerodinamičkih opterećenja.

Preuređivanjem se dobija osnovna jednačina statičke aeroelastične ravnoteže:

$$[\mathbf{K} - q\mathbf{Q}]\,\mathbf{u} = q\mathbf{f}_\alpha + \mathbf{F}_0. \tag{3.51}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}$ je globalna matrica strukturne krutosti;

– $q\mathbf{Q}$ je aerodinamički deo efektivne krutosti;

– $\mathbf{Q}$ je matrica aerodinamičke krutosti;

– $\mathbf{u}$ je vektor generalisanih pomeranja;

– $q\mathbf{f}_\alpha$ je aerodinamičko opterećenje nezavisno od deformacije;

– $\mathbf{F}_0$ je spoljašnje neaerodinamičko opterećenje.

Matrica

$$\mathbf{K}_{ae} = \mathbf{K} - q\mathbf{Q} \tag{3.52}$$

naziva se efektivna aeroelastična matrica krutosti.
U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}_{ae}$ je efektivna aeroelastična matrica krutosti;

– $\mathbf{K}$ je strukturna matrica krutosti;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}$ je matrica aerodinamičke krutosti.

Iz prethodnih izraza vidi se da aerodinamičko opterećenje može imati karakter negativne krutosti. Sa porastom brzine leta raste dinamički pritisak q, pa se efektivna krutost sistema smanjuje. U trenutku divergencije konstrukcija više ne poseduje dovoljno statičke torzione krutosti da uravnoteži aerodinamički moment uvijanja.

Divergencija nastaje kada efektivna aeroelastična matrica postane singularna:

$$\det\left[\mathbf{K} - q_D\mathbf{Q}\right] = 0. \tag{3.53}$$

U ovoj jednačini:

– det[·] označava determinantu matrice;

– $\mathbf{K}$ je globalna matrica strukturne krutosti;

– q_D je kritični dinamički pritisak divergencije;

– $\mathbf{Q}$ je matrica aerodinamičke krutosti.

Kritična brzina divergencije tada se dobija iz kritičnog dinamičkog pritiska:

$$V_D = \sqrt{\frac{2q_D}{\rho}}. \tag{3.54}$$

U ovoj jednačini:

– V_D je kritična brzina divergencije;

– q_D je kritični dinamički pritisak divergencije;

– ρ je gustina fluida.

3.7.1 Strukturni model

Strukturni model predstavlja diskretizovanu elastičnu konstrukciju krila. U zavisnosti od nivoa idealizacije, konstrukcija može biti opisana pomoću grednih, ljuskastih ili zapreminskih konačnih elemenata. Kod tankih aerostruktura najčešće se koriste ljusljuske i ploče, jer omogućavaju efikasno modeliranje membranskih, savojnih i torzionih deformacija.

Za svaki konačni element može se napisati lokalna relacija

$$\mathbf{K}_e\mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e. \tag{3.55}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}_e$ je matrica krutosti konačnog elementa;

– $\mathbf{u}_e$ je vektor čvornih pomeranja elementa;

– $\mathbf{f}_e$ je vektor elementnih sila.

Globalna matrica krutosti dobija se spajanjem svih elementnih matrica:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{T}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}_e. \tag{3.56}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}$ je globalna matrica strukturne krutosti;

– n_e je ukupan broj konačnih elemenata;

– $\mathbf{T}_e$ je transformaciona matrica elementa;

– $\mathbf{T}_e^T$ je transponovana transformaciona matrica;

– $\mathbf{K}_e$ je lokalna matrica krutosti elementa.

Za prostorni model konstrukcije vektor pomeranja jednog čvora najčešće sadrži šest stepeni slobode:

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i & v_i & w_i & \theta_{x,i} & \theta_{y,i} & \theta_{z,i} \end{Bmatrix}^T. \tag{3.57}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{u}_i$ je vektor pomeranja i-tog čvora;

– u_i, v_i i w_i su translacije čvora u pravcima globalnih osa;

– $\theta_{x,i}$, $\theta_{y,i}$ i $\theta_{z,i}$ su rotacije čvora oko globalnih osa;

– superskript T označava transponovanje vektora.

Kod problema divergencije posebno je važno tačno opisati torzionu deformaciju krila. Ako je lokalni ugao uvijanja označen sa $\theta(y)$, tada se efektivni ugao napada može zapisati kao

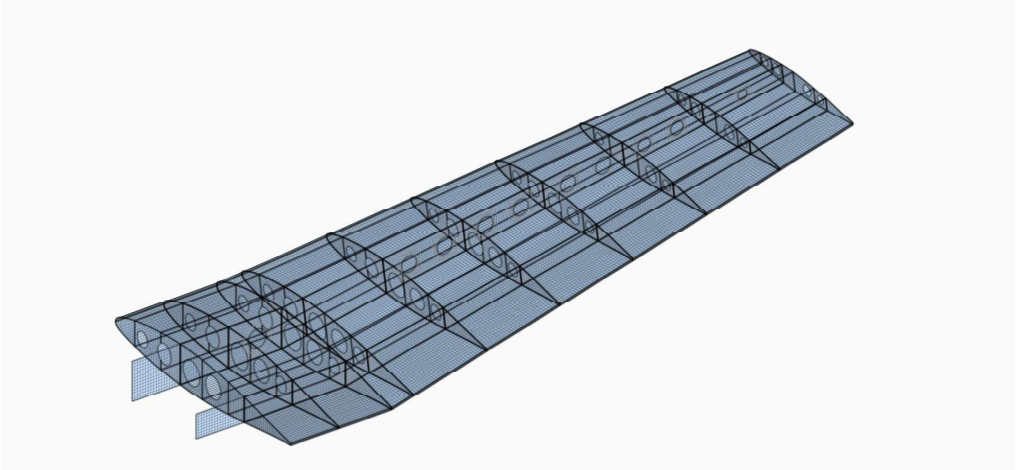
$$\alpha_{\text{eff}}(y) = \alpha_0 + \theta(y). \tag{3.58}$$

U ovoj jednačini:

– $\alpha_{\text{eff}}(y)$ je efektivni lokalni ugao napada na rasponskoj koordinati y;

– α_0 je početni geometrijski ugao napada;

– $\theta(y)$ je lokalni ugao uvijanja krila;



Slika 3.13: Strukturni model

– y je koordinata duž raspona krila.

Ova jednačina predstavlja suštinu statičke divergencije. Ako torziona deformacija povećava lokalni napadni ugao, tada aerodinamička sila dodatno raste, a njen moment još više uvija krilo. Sistem je stabilan samo dok elastična krutost može da zaustavi ovu pozitivnu povratnu spregu.

3.7.2 Aerodinamički model

Aerodinamički model predstavlja diskretizovanu noseću površinu krila. Umesto kontinuirane raspodele pritiska, aerodinamička površina deli se na konačan broj panela. Svaki panel učestvuje u formiranju diskretne raspodele aerodinamičkih sila i momenata. U savremenim numeričkim aeroelastičnim analizama aerodinamičke sile najčešće se određuju pomoću panelnih metoda zasnovanih na teoriji potencijalnog strujanja. Osnovna ideja panelnih metoda jeste da se noseća površina aproksimira konačnim brojem diskretnih panela po kojima se raspodeljuju singulariteti potencijalnog strujanja, kao što su vrtlozi, dipoli ili izvori.

Za razliku od jednostavnih analitičkih modela, panelne metode omogućavaju određivanje raspodele aerodinamičkog opterećenja po celokupnoj površini krila, uključujući uticaj geometrije, vitkosti, strele krila i prostorne deformacije konstrukcije. Aerodinamičke sile tada se ne računaju pomoću jednog globalnog koeficijenta uzgona, već pomoću diskretizovanog polja pritisaka i sila po panelima.

Osnovna relacija panelnih metoda može se zapisati u matričnom obliku kao

$$\mathbf{A}_{IC}\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{w}. \tag{3.59}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{A}_{IC}$ je matrica aerodinamičkih uticajnih koeficijenata;

– $\boldsymbol{\Gamma}$ je vektor nepoznatih singulariteta raspodeljenih po panelima;

– $\boldsymbol{w}$ je vektor uslova neprodiranja strujanja kroz površinu panela.

Matrica aerodinamičkih uticajnih koeficijenata predstavlja vezu između raspodele singulariteta po panelima i brzinskog polja indukovanog na kontrolnim tačkama aerodinamičke mreže. Fizički, uslov neprodiranja zahteva da ukupna normalna komponenta brzine na površini panela bude jednaka nuli.

Nakon određivanja raspodele singulariteta, lokalna aerodinamička opterećenja mogu se izračunati pomoću Bernulijeve jednačine u linearizovanom obliku. U diskretnom obliku aerodinamičke sile mogu se zapisati kao:

$$\Delta\mathbf{p} = q\mathbf{C}_p\mathbf{\Gamma}. \tag{3.60}$$

U ovoj jednačini:

– $\Delta\mathbf{p}$ je vektor diskretnih aerodinamičkih opterećenja ili pritisaka;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{C}_p$ je matrica transformacije singulariteta u raspodelu pritiska;

– $\mathbf{\Gamma}$ je vektor singulariteta raspodeljenih po panelima.

Rezultujuće aerodinamičke sile i momenti zatim se dobijaju integracijom ili sumiranjem opterećenja po svim panelima:

$$\mathbf{F}_a = \sum_{i=1}^{N_p} \Delta\mathbf{p}_i S_i. \tag{3.61}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{F}_a$ je rezultujući vektor aerodinamičkih sila i momenata;

– N_p je ukupan broj panela;

– $\Delta\mathbf{p}_i$ je opterećenje ili pritisak na i-tom panelu;

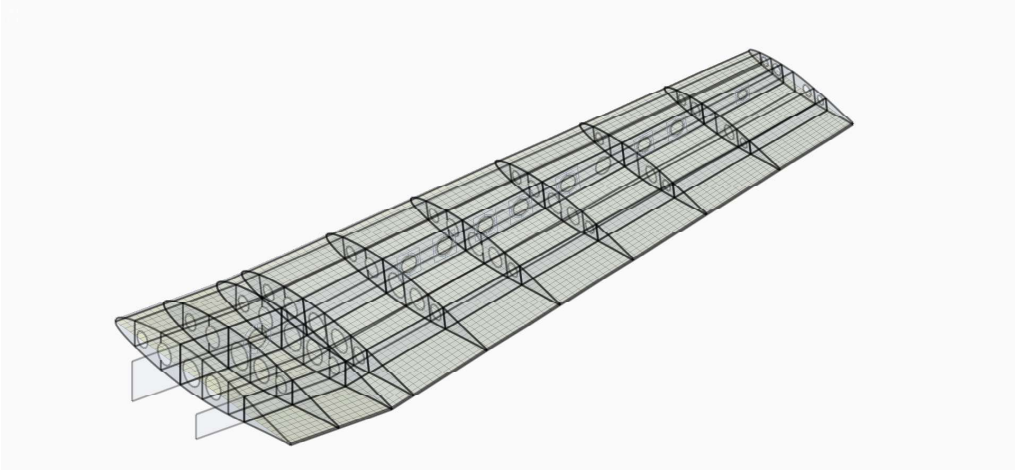
– S_i je površina i-tog panela.

Tačnost panelne metode direktno zavisi od kvaliteta panelizacije aerodinamičke površine. Gušća mreža panela omogućava precizniji opis raspodele aerodinamičkih opterećenja, ali istovremeno povećava računsku složenost problema.

U okviru aeroelastičnih analiza koristi se više različitih panelnih formulacija. Jedna od najpoznatijih metoda jeste metoda dvostruke rešetke vrtloga (engl. *Doublet Lattice Method – DLM*), kod koje se po panelima raspodeljuju dipoli potencijalnog strujanja. Pored DLM metode, često se koriste i:

– Vortex Lattice Method (VLM),

– metode izvora i dipola,



Slika 3.14: Aerodinamičke površine

– Constant Pressure Method (CPM),

– supersonične panelne metode,

– CFD zasnovani aeroelastični modeli.

Vortex Lattice Method zasniva se na raspodeli vrtložnih niti po četvrtinskoj liniji panela i veoma je pogodna za tanke noseće površine pri malim uglovima napada. Metoda konstantnog pritiska pretpostavlja konstantnu raspodelu pritiska po svakom panelu, dok metode izvora i dipola koriste raspodeljene singularitete potencijalnog strujanja za opis lokalnog aerodinamičkog polja.

U poređenju sa CFD metodama, panelne metode imaju značajno manju računsku zahtevnost, zbog čega predstavljaju veoma efikasan kompromis između tačnosti i brzine proračuna. Upravo zbog toga one čine osnovu velikog broja numeričkih aeroelastičnih solvera koji se koriste u preliminarnom i srednjem nivou projektovanja vazduhoplovnih konstrukcija. U linearnom potencijalnom strujanju, lokalni aerodinamički pritisak može se povezati sa promenom geometrije i lokalnim efektivnim uglom napada. U diskretnom obliku ova veza se može izraziti kao

$$\Delta \mathbf{p} = q \mathbf{A}_{IC} \boldsymbol{\eta}. \tag{3.62}$$

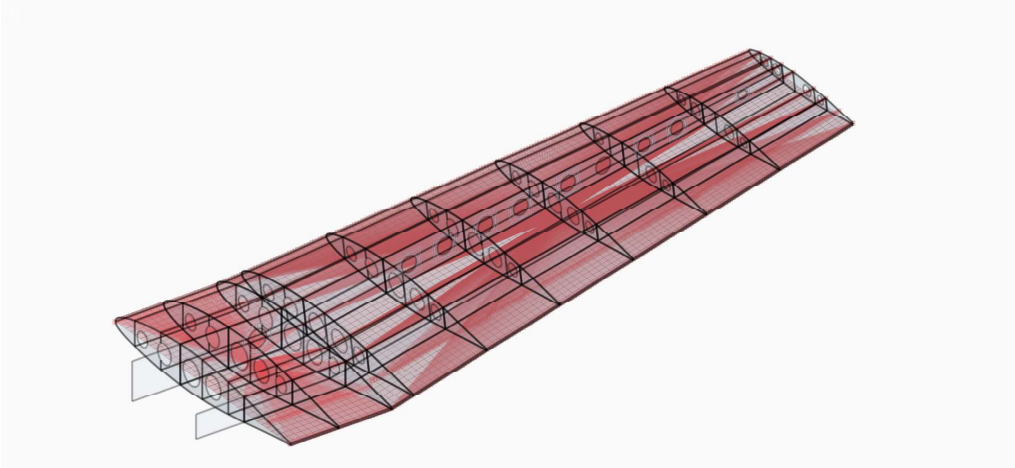
U ovoj jednačini:

– $\Delta \mathbf{p}$ je vektor diskretnih pritisaka ili normalnih opterećenja po panelima;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{A}_{IC}$ je matrica aerodinamičkih uticajnih koeficijenata;

– $\boldsymbol{\eta}$ je vektor generalisanih aerodinamičkih deformacija ili promena efektivnog ugla napada.



Slika 3.15: Interpolaciona veza između strukturne i aerodinamičke mreže

Matrica aerodinamičkih uticajnih koeficijenata povezuje lokalnu promenu geometrije aerodinamičke površine sa indukovanim aerodinamičkim silama. Ona zavisi od geometrije aerodinamičke površine, broja i rasporeda panela, Machovog broja, referentne površine, referentne tetive i izabranog aerodinamičkog modela.

Ukupna aerodinamička sila može se formalno zapisati kao

$$\mathbf{F}_a = q\mathbf{S}_a\Delta\mathbf{p}. \tag{3.63}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{F}_a$ je vektor rezultujućih aerodinamičkih sila i momenata;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{S}_a$ je matrica kojom se diskretna opterećenja panela prevode u rezultujuće sile i momente;

– $\Delta\mathbf{p}$ je vektor diskretnih aerodinamičkih pritisaka ili opterećenja po panelima.

U numeričkom aeroelastičnom modelu aerodinamička mreža ne mora biti identična strukturnoj mreži. To je čak i poželjno, jer dobra strukturna mreža i dobra aerodinamička mreža ne moraju imati iste kriterijume kvaliteta. Strukturna mreža mora pravilno opisati krutost, napone i deformacije konstrukcije, dok aerodinamička mreža mora pravilno opisati raspodelu aerodinamičkog opterećenja po nosećoj površini.

3.7.3 Veza između strukturne i aerodinamičke mreže

Pošto strukturna i aerodinamička mreža najčešće nisu iste, uvodi se interpolaciona veza između ova dva diskretna sistema. Njena uloga je dvostruka: prvo, deformacija konstrukcije mora se preneti na aerodinamičku površinu; drugo, aerodinamičke sile moraju se preneti nazad na strukturne čvorove.

Neka je vektor strukturnih pomeranja označen sa $\mathbf{u}_s$, a vektor aerodinamičkih pomeranja sa $\mathbf{u}_a$. Prenos pomeranja sa strukture na aerodinamičku mrežu može se zapisati kao

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{H}\mathbf{u}_s. \tag{3.64}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{u}_a$ je vektor pomeranja aerodinamičkih tačaka ili panela;

– $\mathbf{H}$ je interpolaciona matrica veze između strukturne i aerodinamičke mreže;

– $\mathbf{u}_s$ je vektor strukturnih čvornih pomeranja.

Ova relacija znači da se oblik deformisane aerodinamičke površine određuje na osnovu deformacije strukturne mreže. Time aerodinamički model dobija informaciju o lokalnom savijanju, uvijanju i promeni efektivnog ugla napada.

Sa druge strane, aerodinamičke sile izračunate na panelima moraju se preneti nazad na strukturne čvorove. Da bi se očuvala energijska konzistentnost, prenos sila se zapisuje pomoću transponovane interpolacione matrice:

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{H}^T\mathbf{F}_a. \tag{3.65}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{F}_s$ je vektor ekvivalentnih sila na strukturnoj mreži;

– $\mathbf{H}^T$ je transponovana interpolaciona matrica;

– $\mathbf{F}_a$ je vektor aerodinamičkih sila na aerodinamičkoj mreži.

Energijska konzistentnost zahteva da rad aerodinamičkih sila na aerodinamičkim pomeranjima bude jednak radu ekvivalentnih sila na strukturnim pomeranjima:

$$\delta W_a = \mathbf{F}_a^T\delta\mathbf{u}_a = \mathbf{F}_s^T\delta\mathbf{u}_s = \delta W_s. \tag{3.66}$$

U ovoj jednačini:

– δW_a je virtuelni rad aerodinamičkih sila;

– $\mathbf{F}_a$ je vektor aerodinamičkih sila;

– $\delta\mathbf{u}_a$ je vektor virtuelnih aerodinamičkih pomeranja;

– $\mathbf{F}_s$ je vektor ekvivalentnih strukturnih sila;

– $\delta\mathbf{u}_s$ je vektor virtuelnih strukturnih pomeranja;

– δW_s je virtuelni rad ekvivalentnih sila na strukturi.

Pošto je

$$\delta \mathbf{u}_a = \mathbf{H}\delta \mathbf{u}_s, \tag{3.67}$$

u ovoj jednačini:

– $\delta \mathbf{u}_a$ je vektor virtuelnih pomeranja aerodinamičke mreže;

– $\mathbf{H}$ je interpolaciona matrica;

– $\delta \mathbf{u}_s$ je vektor virtuelnih pomeranja strukturne mreže.

zamenom u izraz za virtuelni rad dobija se

$$\mathbf{F}_a^T \mathbf{H}\delta \mathbf{u}_s = \mathbf{F}_s^T \delta \mathbf{u}_s. \tag{3.68}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{F}_a^T$ je transponovani vektor aerodinamičkih sila;

– $\mathbf{H}$ je interpolaciona matrica;

– $\delta \mathbf{u}_s$ je vektor virtuelnih strukturnih pomeranja;

– $\mathbf{F}_s^T$ je transponovani vektor ekvivalentnih strukturnih sila.

Iz prethodne relacije sledi:

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{H}^T \mathbf{F}_a. \tag{3.69}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{F}_s$ je vektor sila prenetih na strukturnu mrežu;

– $\mathbf{H}^T$ je transponovana interpolaciona matrica;

– $\mathbf{F}_a$ je vektor aerodinamičkih sila.

Ova relacija je od fundamentalnog značaja. Ona garantuje da se tokom prenosa opterećenja između aerodinamičke i strukturne mreže ne stvara niti gubi veštačka energija. U suprotnom, numerički model mogao bi pokazati lažno povećanu ili lažno smanjenu aeroelastičnu stabilnost.

Formiranje spregnutog aeroelastičnog sistema

Kombinovanjem aerodinamičke i strukturne interpolacije dobija se aeroelastični sistem u kome aerodinamičke sile zavise od strukturnih pomeranja.

Ako se aerodinamičke sile na aerodinamičkoj mreži napišu kao:

$$\mathbf{F}_a = q\mathbf{Q}_a \mathbf{u}_a, \tag{3.70}$$

u ovoj jednačini:

– $\mathbf{F}_a$ je vektor aerodinamičkih sila na aerodinamičkoj mreži;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}_a$ je aerodinamička matrica definisana na aerodinamičkoj mreži;

– $\mathbf{u}_a$ je vektor aerodinamičkih pomeranja.

a ako važi:

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{H}\mathbf{u}_s, \tag{3.71}$$

u ovoj jednačini:

– $\mathbf{u}_a$ je vektor aerodinamičkih pomeranja;

– $\mathbf{H}$ je interpolaciona matrica;

– $\mathbf{u}_s$ je vektor strukturnih pomeranja.

tada je:

$$\mathbf{F}_a = q\mathbf{Q}_a\mathbf{H}\mathbf{u}_s. \tag{3.72}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{F}_a$ je vektor aerodinamičkih sila;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}_a$ je aerodinamička matrica na aerodinamičkoj mreži;

– $\mathbf{H}$ je interpolaciona matrica;

– $\mathbf{u}_s$ je vektor strukturnih pomeranja.

Prenosom sila na strukturnu mrežu dobija se

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{H}^T\mathbf{F}_a = q\mathbf{H}^T\mathbf{Q}_a\mathbf{H}\mathbf{u}_s. \tag{3.73}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{F}_s$ je vektor aerodinamičkih sila prenetih na strukturnu mrežu;

– $\mathbf{H}^T$ je transponovana interpolaciona matrica;

– $\mathbf{F}_a$ je vektor aerodinamičkih sila na aerodinamičkoj mreži;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}_a$ je aerodinamička matrica na aerodinamičkoj mreži;

– $\mathbf{H}$ je interpolaciona matrica;

– $\mathbf{u}_s$ je vektor strukturnih pomeranja.

Zato se efektivna aerodinamička matrica u strukturnim koordinatama može zapisati kao:

$$\mathbf{Q}_s = \mathbf{H}^T \mathbf{Q}_a \mathbf{H}. \tag{3.74}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{Q}_s$ je aerodinamička matrica projektovana na strukturne stepene slobode;

– $\mathbf{H}^T$ je transponovana interpolaciona matrica;

– $\mathbf{Q}_a$ je aerodinamička matrica na aerodinamičkoj mreži;

– $\mathbf{H}$ je interpolaciona matrica.

Konačna statička aeroelastična jednačina tada glasi:

$$[\mathbf{K}_s - q\mathbf{Q}_s]\,\mathbf{u}_s = \mathbf{F}_{\text{ext}}. \tag{3.75}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}_s$ je strukturna matrica krutosti;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}_s$ je aerodinamička matrica projektovana na strukturne stepene slobode;

– $\mathbf{u}_s$ je vektor strukturnih pomeranja;

– $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ je vektor spoljašnjih opterećenja.

Ovo je centralna jednačina numeričke statičke aeroelastičnosti. Ona pokazuje da se problem divergencije ne posmatra samo kao problem povećanja aerodinamičke sile, već kao problem promene efektivne krutosti celog sistema.

Uslov divergencije

Divergencija predstavlja statičku aeroelastičnu nestabilnost pri kojoj aerodinamički momenti uvijanja nadvladaju elastičnu torzionu krutost konstrukcije. Matematički, divergencija nastaje kada homogeni oblik jednačine:

$$[\mathbf{K}_s - q\mathbf{Q}_s]\,\mathbf{u}_s = \mathbf{0} \tag{3.76}$$

ima netrivijalno rešenje.
U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}_s$ je strukturna matrica krutosti;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}_s$ je aerodinamička matrica u strukturnim koordinatama;

– $\mathbf{u}_s$ je vektor strukturnih pomeranja;

– $\mathbf{0}$ je nulti vektor.

Netrivijalno rešenje postoji samo ako je:

$$\det\left[\mathbf{K}_s - q\mathbf{Q}_s\right] = 0. \tag{3.77}$$

U ovoj jednačini:

– $\det[\cdot]$ označava determinantu matrice;

– $\mathbf{K}_s$ je strukturna matrica krutosti;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}_s$ je aerodinamička matrica projektovana na strukturne stepene slobode.

Ovaj problem može se posmatrati i kao generalizovani problem sopstvenih vrednosti:

$$\mathbf{K}_s\boldsymbol{\phi} = q\mathbf{Q}_s\boldsymbol{\phi}. \tag{3.78}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}_s$ je strukturna matrica krutosti;

– $\boldsymbol{\phi}$ je sopstveni oblik divergencije;

– q je sopstvena vrednost koja predstavlja dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}_s$ je aerodinamička matrica u strukturnim koordinatama.

Najmanja pozitivna sopstvena vrednost predstavlja kritični dinamički pritisak divergencije:

$$q_D = \min\left(q_i > 0\right). \tag{3.79}$$

U ovoj jednačini:

– q_D je kritični dinamički pritisak divergencije;

– q_i su sopstvene vrednosti generalizovanog problema;

– uslov $q_i > 0$ označava da se razmatraju samo fizički prihvatljive pozitivne vrednosti dinamičkog pritiska.

Kritična brzina divergencije zatim se računa pomoću izraza:

$$V_D = \sqrt{\frac{2q_D}{\rho}}. \tag{3.80}$$

U ovoj jednačini:

– V_D je kritična brzina divergencije;

– q_D je kritični dinamički pritisak divergencije;

– ρ je gustina fluida.

Numeričko određivanje divergencije promenom brzine

U praktičnoj analizi često se ne rešava eksplicitno generalizovani sopstveni problem, već se izvodi niz statičkih aeroelastičnih proračuna za različite vrednosti brzine leta. Za svaku brzinu izračunava se dinamički pritisak:

$$q_i = \frac{1}{2}\rho V_i^2. \tag{3.81}$$

U ovoj jednačini:

– q_i je dinamički pritisak za i-tu brzinu;

– ρ je gustina fluida;

– V_i je i-ta vrednost brzine leta.

Zatim se za svaku brzinu rešava sistem:

$$\left[\mathbf{K}_s - q_i \mathbf{Q}_s\right] \mathbf{u}_s^{(i)} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{(i)}. \tag{3.82}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}_s$ je strukturna matrica krutosti;

– q_i je dinamički pritisak za izabranu brzinu;

– $\mathbf{Q}_s$ je aerodinamička matrica u strukturnim koordinatama;

– $\mathbf{u}_s^{(i)}$ je vektor strukturnih pomeranja za i-tu brzinu;

– $\mathbf{F}_{\text{ext}}^{(i)}$ je vektor spoljašnjih opterećenja za i-ti slučaj.

Kako se brzina približava kritičnoj vrednosti, pomeranja i uglovi uvijanja počinju naglo da rastu. U idealnom linearnom modelu, u blizini divergencije efektivna krutost sistema teži nuli, pa odziv teži beskonačnosti.

Za izabranu kontrolnu tačku na krilu, na primer pri vrhu ili na karakterističnom preseku, može se pratiti zavisnost

$$\theta = \theta(V). \tag{3.83}$$

U ovoj jednačini:

– θ je ugao uvijanja u izabranoj kontrolnoj tački;

– V je brzina leta;

– $\theta(V)$ označava da je ugao uvijanja funkcija brzine.

U oblasti ispod divergencije odziv je konačan i stabilan. U blizini kritične brzine kriva $\theta(V)$ pokazuje naglo povećanje nagiba:

$$\frac{d\theta}{dV} \to \infty \quad \text{kada} \quad V \to V_D. \tag{3.84}$$

U ovoj jednačini:

– $d\theta/dV$ je promena ugla uvijanja u odnosu na brzinu leta;

– θ je ugao uvijanja;

– V je brzina leta;

– V_D je kritična brzina divergencije.

U numeričkom smislu, približavanje divergenciji može se prepoznati po naglom porastu torzionog ugla krila, naglom porastu vertikalnih pomeranja, lošoj uslovljenosti matrice aeroelastične krutosti, gubitku konvergencije statičkog rešenja ili promeni znaka efektivne krutosti sistema.

Fizičko tumačenje numeričkog modela

Numerički aeroelastični model može se tumačiti kao prostorno i matrično proširenje jednostavnog torzionog modela krila. Kod elementarnog modela divergencije polazi se od ravnoteže,

$$K_\theta \theta = qSceC_{L_\alpha} \left(\alpha_0 + \theta\right). \tag{3.85}$$

U ovoj jednačini:

– K_θ je torziona krutost karakterističnog preseka ili ekvivalentnog torzionog modela;

– θ je ugao uvijanja;

– q je dinamički pritisak;

– S je referentna površina;

– c je referentna tetiva;

– e je rastojanje između aerodinamičkog centra i elastične ose;

– C_{L_α} je gradijent koeficijenta uzgona po uglu napada;

– α_0 je početni geometrijski ugao napada.

Preuređivanjem se dobija:

$$(K_\theta - qSceC_{L_\alpha})\,\theta = qSceC_{L_\alpha}\alpha_0. \tag{3.86}$$

U ovoj jednačini:

– K_θ je torziona krutost;

– $qSceC_{L_\alpha}$ predstavlja aerodinamički doprinos negativnoj torzionoj krutosti;

– θ je ugao uvijanja;

– q je dinamički pritisak;

– S je referentna površina;

– c je referentna tetiva;

– e je rastojanje između aerodinamičkog centra i elastične ose;

– C_{L_α} je gradijent uzgona;

– α_0 je početni ugao napada.

Divergencija nastaje kada je:

$$K_\theta - q_D SceC_{L_\alpha} = 0. \tag{3.87}$$

U ovoj jednačini:

– K_θ je torziona krutost;

– q_D je kritični dinamički pritisak divergencije;

– S je referentna površina;

– c je referentna tetiva;

– e je krak aerodinamičke sile u odnosu na elastičnu osu;

– C_{L_α} je gradijent uzgona.

Odnosno,

$$q_D = \frac{K_\theta}{SceC_{L_\alpha}}. \tag{3.88}$$

U ovoj jednačini:

– q_D je kritični dinamički pritisak divergencije;

– K_θ je torziona krutost;

– S je referentna površina;

– c je referentna tetiva;

– e je rastojanje između aerodinamičkog centra i elastične ose;

– C_{L_α} je gradijent uzgona.

Numerički model zadržava istu fizičku ideju, ali umesto jedne torzione krutosti K_θ koristi kompletnu matricu strukturne krutosti $\mathbf{K}_s$, a umesto jednog aerodinamičkog koeficijenta koristi kompletnu matricu aerodinamičkih uticaja $\mathbf{Q}_s$.

Zato se jednostavni izraz,

$$K_\theta - qSceC_{L_\alpha} = 0 \tag{3.89}$$

u ovoj jednačini:

– K_θ je skalarna torziona krutost;

– $qSceC_{L_\alpha}$ je skalarni aerodinamički destabilizujući član;

– q je dinamički pritisak;

– S je referentna površina;

– c je referentna tetiva;

– e je krak aerodinamičke sile;

– C_{L_α} je gradijent uzgona.

u opštem diskretnom obliku zamenjuje uslovom:

$$\det\left[\mathbf{K}_s - q_D\mathbf{Q}_s\right] = 0. \tag{3.90}$$

U ovoj jednačini:

– det[·] označava determinantu matrice;

– $\mathbf{K}_s$ je strukturna matrica krutosti;

– q_D je kritični dinamički pritisak divergencije;

– $\mathbf{Q}_s$ je aerodinamička matrica u strukturnim koordinatama.

Ovo pokazuje da numerički pristup nije odvojen od klasične teorije divergencije, već predstavlja njeno matrično i prostorno proširenje.

Prednosti numeričkog pristupa

Numerički pristup omogućava analizu konfiguracija koje je teško pouzdano opisati jednostavnim analitičkim modelima. Posebno je koristan kada konstrukcija ima promenljivu tetivu, promenljivu debljinu, složenu raspodelu krutosti, spregnute savojno-torzione deformacije, složene granične uslove ili realističnu aerodinamičku geometriju.

Njegova najveća prednost je u tome što omogućava da se lokalni i globalni efekti posmatraju istovremeno. Kod realnog krila divergencija nije uvek posledica jednostavnog uvijanja jedne idealizovane grede. Ona može biti posledica prostorne kombinacije savijanja, uvijanja, lokalne fleksibilnosti i raspodele aerodinamičkog opterećenja. Upravo zato matrični oblik problema ima veliku vrednost: on ne nameće unapred oblik nestabilnosti, već dozvoljava da se kritični oblik pojavi iz samog sistema jednačina.

Međutim, numerički pristup zahteva pažljivo definisanje modela. Rezultat zavisi od kvaliteta strukturne mreže, aerodinamičke panelizacije, interpolacione veze između mreža, graničnih uslova i konzistentnosti jedinica. Zbog toga se numerički rezultati uvek moraju proveravati pomoću jednostavnijih inženjerskih procena, kao što su metoda karakterističnog preseka i poluanalitički Galerkinov model.

Softverske implementacije numeričke aeroelastičnosti

Savremena numerička aeroelastična analiza danas se najčešće izvodi korišćenjem specijalizovanih softverskih paketa koji omogućavaju spregnutu strukturno-aerodinamičku simulaciju. Ovi softverski sistemi integrišu metode konačnih elemenata, panelne aerodinamičke metode i algoritme za interpolaciju između strukturne i aerodinamičke mreže.

Jedan od najznačajnijih i najrasprostranjenijih aeroelastičnih solvera jeste MSC/Simcenter NASTRAN. U okviru statičke aeroelastičnosti posebno je značajan solver SOL 144, namenjen rešavanju linearnih statičkih aeroelastičnih problema. Ovaj solver omogućava određivanje aeroelastičnih deformacija, raspodele opterećenja i kritične brzine divergencije korišćenjem spregnutog FEM i panelnog aerodinamičkog modela. U praksi, SOL 144 predstavlja jedan od standardnih industrijskih alata za preliminarne i srednje detaljne aeroelastične analize vazduhoplovnih konstrukcija.

Pored NASTRAN-a, aeroelastične analize moguće je realizovati i korišćenjem softverskog paketa ABAQUS. Iako ABAQUS primarno predstavlja nelinearni FEM solver, aeroelastični problemi mogu se rešavati kroz spregu sa spoljnim aerodinamičkim modelima, korišćenjem korisničkih potprograma ili CFD interakcije. Zbog veoma razvijenih nelinearnih mogućnosti, ABAQUS je posebno pogodan za analizu velikih

deformacija, nelinearnog ponašanja materijala i složenih kontaktnih problema u aeroelastičnim sistemima.

ANSYS takođe omogućava aeroelastične analize kroz spregu strukturnog i fluidnog solvera. U okviru ANSYS okruženja moguće je kombinovati FEM strukturni model sa CFD analizom ili panelnim aerodinamičkim modelima. Ovakav pristup posebno je značajan kod problema gde linearna potencijalna aerodinamika nije dovoljna, na primer kod velikih napadnih uglova, odvajanja strujanja ili izraženih nelinearnih efekata fluida.

U aeroelastičnoj praksi značajno mesto zauzimaju i specijalizovani aeroelastični paketi kompanije ZONA Technology, kao što su ZAERO i ZONAIR. Ovi sistemi razvijeni su prvenstveno za vazduhoplovne aeroelastične analize i integraciju sa industrijskim FEM modelima. Posebno su poznati po primeni u analizama divergencije, fluttera, opterećenja i aeroelastične optimizacije vazduhoplovnih konstrukcija.

Pored navedenih komercijalnih sistema, aeroelastične analize moguće je realizovati i korišćenjem CFD solvera visoke tačnosti, pri čemu se aerodinamičke sile određuju direktnim rešavanjem Navije-Stoksovih jednačina. Međutim, ovakvi pristupi imaju veoma visoku računsku zahtevnost i najčešće se koriste u završnim fazama projektovanja ili u istraživačkim analizama visoke vernosti.

Uprkos velikom razvoju CFD metoda, panelni aeroelastični modeli i dalje imaju izuzetno značajnu ulogu u inženjerskoj praksi zbog svoje numeričke efikasnosti, relativno male računske zahtevnosti i dobre tačnosti u oblasti linearne aeroelastičnosti.

Zaključna napomena

Numeričko određivanje kritične brzine divergencije predstavlja najopštiji pristup u okviru statičke aeroelastične analize. Ono omogućava da se elastičnost konstrukcije, aerodinamička opterećenja i njihova međusobna interakcija analiziraju u prostorno diskretnom obliku. U osnovi ovog pristupa nalazi se efektivna aeroelastična krutost:

$$\mathbf{K}_{ae} = \mathbf{K}_s - q\mathbf{Q}_s. \tag{3.91}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}_{ae}$ je efektivna aeroelastična matrica krutosti;

– $\mathbf{K}_s$ je strukturna matrica krutosti;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}_s$ je aerodinamička matrica projektovana na strukturne stepene slobode.

Divergencija nastaje kada ova matrica izgubi regularnost. Fizički, to odgovara stanju u kome aerodinamički momenti uvijanja više ne mogu biti uravnoteženi elastičnom torzionom krutošću konstrukcije. U tom smislu, numerički model ne menja osnovnu fiziku divergencije; on samo omogućava da se ista fizika prikaže sa mnogo većom geometrijskom, strukturnom i aerodinamičkom vernošću.

3.8 Redukovani aeroelastični FEM pristup određivanju brzine divergencije

Klasične metode određivanja kritične brzine divergencije, kao što su metoda karakterističnog preseka i Galerkinova metoda, predstavljaju veoma efikasne inženjerske alate za preliminarnu procenu aeroelastične stabilnosti konstrukcije. Njihova osnovna prednost ogleda se u relativno jednostavnoj matematičkoj formulaciji, maloj računskoj zahtevnosti i mogućnosti brzog određivanja kritičnih parametara sistema.

Međutim, i pored značajne praktične vrednosti, ove metode imaju određena ograničenja. U najvećem broju slučajeva, klasični analitički i poluanalitički modeli divergencije zasnivaju se na idealizovanim torzionim modelima konstrukcije, pri čemu se deformaciono polje aproksimira unapred pretpostavljenim funkcijama oblika. Takav pristup omogućava određivanje globalnog aeroelastičnog odziva, ali ne omogućava detaljnu analizu lokalnog naponskog stanja, koncentracija napona, lokalne fleksibilnosti i realne raspodele deformacija u složenim konstrukcijama.

Sa druge strane, potpuna numerička aeroelastična analiza, zasnovana na spregnutim FEM i panelnim aerodinamičkim modelima, omogućava veoma visok nivo vernosti simulacije, ali zahteva specijalizovane aeroelastične solvere, složenu pripremu modela i značajne računske resurse. Takvi pristupi često prevazilaze potrebe preliminarnih inženjerskih analiza i nisu uvek dostupni manjim istraživačkim grupama, laboratorijama ili projektantskim timovima.

Iz navedenih razloga razvijen je redukovani aeroelastični FEM pristup određivanju kritične brzine divergencije. Osnovna ideja metode jeste kombinovanje prednosti Galerkinove aeroelastične formulacije i standardne statičke metode konačnih elemenata.

U predloženom pristupu Galerkinova metoda koristi se za određivanje raspodele torzionog ugla duž raspona krila, odnosno za određivanje aeroelastičnog polja uvijanja:

$$\theta = \theta(y). \tag{3.92}$$

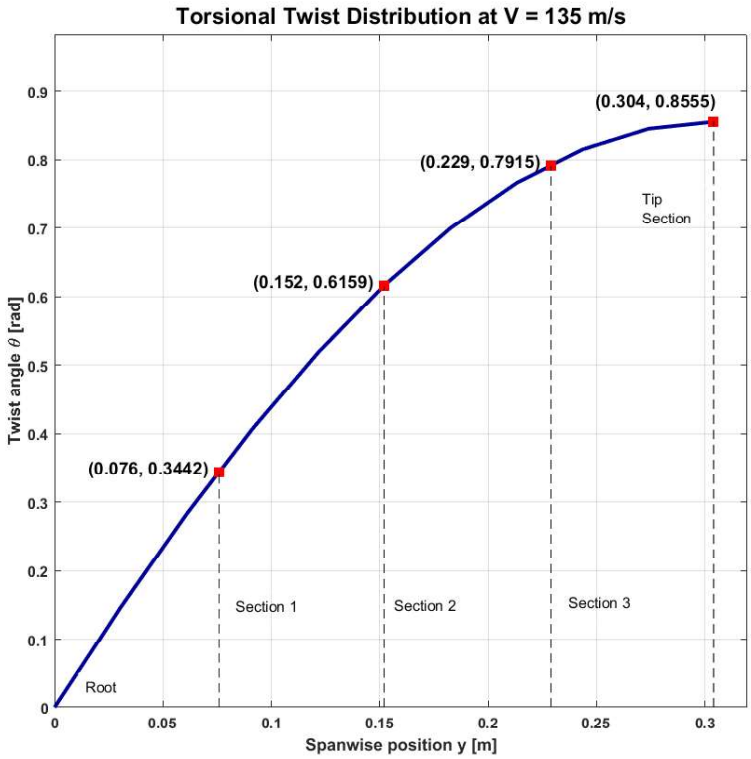
U ovoj jednačini:

– $\theta(y)$ predstavlja raspodelu ugla uvijanja duž raspona;

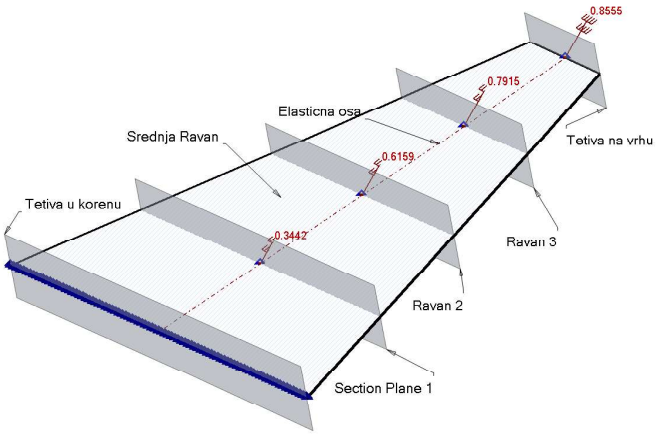
– y je rasponska koordinata krila.

Dobijene vrednosti lokalnih uglova uvijanja zatim se uvode u standardni statički FEM model kao rotacije odgovarajućih (izabranih)preseka konstrukcije. Na taj način moguće je sprovesti detaljnu analizu napona, deformacija i lokalnog ponašanja konstrukcije bez potrebe za korišćenjem specijalizovanog aeroelastičnog solvera.

Predloženi pristup može se posmatrati kao metoda srednjeg nivoa vernosti između jednostavnih analitičkih modela i potpunih aeroelastičnih FEM simulacija. Njegova osnovna prednost jeste mogućnost kombinovanja relativno male računske zahtevnosti sa značajno realističnijim opisom lokalnog strukturnog odziva.



Slika 3.16: Enter Caption



Slika 3.17: Enter Caption

Osnovna ideja redukovanog aeroelastičnog FEM pristupa

Osnovna ideja predložene metode zasniva se na razdvajanju problema aeroelastične divergencije na dva međusobno povezana nivoa:

– globalni aeroelastični problem;

– lokalni strukturni problem.

Globalni aeroelastični problem rešava se pomoću Galerkinove metode, pri čemu se određuje raspodela ugla uvijanja duž raspona krila. Ovaj deo analize opisuje dominantno aeroelastično ponašanje konstrukcije i omogućava određivanje aeroelastičnog polja deformacija.

Nakon toga, dobijene vrednosti lokalnih uglova uvijanja diskretizuju se po presecima duž raspona i prenose u detaljan FEM model konstrukcije. U FEM analizi ove vrednosti se uvode kao rotacije odgovarajućih čvorova ili preseka konstrukcije.

Na taj način moguće je simulirati aeroelastičnu deformaciju korišćenjem standardnog statičkog solvera.

Predloženi pristup može se predstaviti sledećim tokom analize:

Galerkinova aeroelastična analiza → raspodela uvijanja → diskretizacija rotacija → rotacije u FEM modelu → statička analiza napona i deformacija.

Suštinski, metoda koristi aeroelastični model za određivanje globalne kinematike konstrukcije, dok FEM model služi za određivanje realnog strukturnog odziva.

3.8.1 Galerkinovo određivanje aeroelastičnog polja uvijanja

U okviru Galerkinove formulacije, raspodela ugla uvijanja duž raspona aproksimira se linearnom kombinacijom funkcija oblika:

$$\theta(y) = \sum_{i=1}^{N} q_i \phi_i(y). \tag{3.93}$$

U ovoj jednačini:

– $\theta(y)$ je raspodela ugla uvijanja duž raspona;

– q_i su generalizovane koordinate sistema;

– $\phi_i(y)$ su aproksimacione funkcije oblika;

– N je broj funkcija oblika.

Galerkinov postupak omogućava transformaciju diferencijalne jednačine aeroelastične ravnoteže u diskretni algebrajski sistem jednačina:

$$\mathbf{K}_g \boldsymbol{q} = q\mathbf{Q}_g \boldsymbol{q} + \boldsymbol{F}_g. \tag{3.94}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}_g$ je Galerkinova matrica strukturne krutosti;

– $\boldsymbol{q}$ je vektor generalizovanih koordinata;

– q je dinamički pritisak;

– $\mathbf{Q}_g$ je Galerkinova aerodinamička matrica;

– $\boldsymbol{F}_g$ je vektor generalizovanih opterećenja.

Rešavanjem ovog sistema dobija se raspodela torzionih uglova duž raspona krila. Za izabrane karakteristične preseke duž raspona određuju se diskretne vrednosti:

$$\theta(y) \rightarrow \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n. \tag{3.95}$$

U ovoj jednačini:

– θ_i predstavlja ugao uvijanja u i-tom karakterističnom preseku;

– n je broj izabranih preseka.

Ove vrednosti predstavljaju osnovni ulaz za naredni korak FEM analize.

3.8.2 Diskretizacija aeroelastičnog polja deformacija

Jedan od ključnih koraka predložene metode jeste pravilna diskretizacija kontinuiranog aeroelastičnog polja uvijanja.

U praksi se raspodela ugla uvijanja određuje u konačnom broju karakterističnih preseka duž raspona krila. Izbor broja preseka zavisi od:

– geometrije konstrukcije;

– očekivanog oblika deformacije;

– nivoa željene tačnosti;

– gustine FEM mreže.

Za svaki karakteristični presek određuje se lokalni ugao uvijanja:

$$\theta_i = \theta(y_i). \tag{3.96}$$

U ovoj jednačini:

– θ_i je ugao uvijanja u preseku i;

– y_i je rasponska koordinata preseka.

Dobijene vrednosti zatim se prenose u FEM model konstrukcije. Na taj način kontinuirano aeroelastično polje postaje diskretni skup kinematičkih uslova.

Sa fizičkog aspekta, ovaj korak predstavlja aproksimaciju realne aeroelastične deformacije konstrukcije pomoću konačnog broja lokalnih rotacija.

FEM implementacija rotacija

Nakon određivanja diskretnih uglova uvijanja, sledeći korak predstavlja njihovo uvođenje u FEM model konstrukcije.

U standardnoj FEM formulaciji čvorni stepeni slobode mogu sadržati translacije i rotacije:

$$\mathbf{u} * i = \begin{Bmatrix} u_i & v_i & w_i & \theta * x, i & \theta_{y,i} & \theta_{z,i} \end{Bmatrix}^T. \tag{3.97}$$

U ovoj jednačini:

– u_i, v_i i w_i predstavljaju translacije čvora;

– $\theta_{x,i}$, $\theta_{y,i}$ i $\theta_{z,i}$ predstavljaju rotacije čvora.

U predloženom pristupu aeroelastični uglovi uvijanja uvode se kao rotacije odgovarajućih čvorova ili preseka konstrukcije:

$$\theta_{z,i} = \theta_i. \tag{3.98}$$

U ovoj jednačini:

– $\theta_{z,i}$ predstavlja torzionu rotaciju FEM preseka;

– θ_i predstavlja aeroelastični ugao uvijanja dobijen Galerkinovom metodom.

Na taj način aeroelastična deformacija postaje deo statičkog FEM modela.

Veoma važna prednost ovog pristupa jeste činjenica da nije potreban specijalizovani aeroelastični solver. Analiza se može sprovesti korišćenjem standardnog statičkog FEM solvera.

To značajno pojednostavljuje implementaciju metode i omogućava njenu primenu u velikom broju postojećih FEM okruženja.

Statička analiza napona i deformacija

Nakon uvođenja rotacija rešava se standardni statički FEM problem:

$$\mathbf{K}_s\mathbf{u} = \mathbf{F}. \tag{3.99}$$

U ovoj jednačini:

– $\mathbf{K}_s$ je strukturna matrica krutosti;

– $\mathbf{u}$ je vektor čvornih pomeranja;

– $\mathbf{F}$ je vektor spoljašnjih sila i ekvivalentnih opterećenja.

Za razliku od klasičnih aeroelastičnih metoda, ovde se ne dobija samo globalni ugao uvijanja, već kompletno naponsko i deformaciono stanje konstrukcije.

To omogućava:

– određivanje lokalnih napona;

– određivanje koncentracija napona;

– određivanje lokalnih deformacija;

– određivanje kritičnih zona konstrukcije;

– procenu lokalne nosivosti konstrukcije.

Posebno je značajna mogućnost analize složenih unutrašnjih struktura krila, uključujući:

– rebra

– ramenjače

– oplate

– uzdužnike

– višekomorne torzione kutije

Na taj način moguće je analizirati realističan odziv konstrukcije pri aeroelastičnoj deformaciji.

Određivanje kritične brzine divergencije

Kritična brzina divergencije određuje se iterativnim povećavanjem brzine leta.

Za svaku vrednost brzine određuje se dinamički pritisak:

$$q_i = \frac{1}{2}\rho V_i^2. \tag{3.100}$$

U ovoj jednačini:

– q_i je dinamički pritisak za brzinu V_i;

– ρ je gustina fluida;

– V_i je brzina leta.

Zatim se Galerkinovom metodom određuje odgovarajuće aeroelastično polje uvijanja, koje se prenosi u FEM model.

Kako se brzina povećava, lokalni uglovi uvijanja i deformacije konstrukcije počinju ubrzano da rastu. U blizini divergencije sistem pokazuje izraženo povećanje osetljivosti na male promene brzine.

Kritična brzina divergencije može se proceniti analizom:

– naglog porasta uglova uvijanja;

– naglog porasta deformacija;

– promene efektivne torzione krutosti;

– pojave numeričke nestabilnosti.

Za kontrolni presek može se pratiti zavisnost:

$$\theta = \theta(V). \tag{3.101}$$

U ovoj jednačini:

– θ predstavlja lokalni ugao uvijanja;

– V predstavlja brzinu leta.

U blizini divergencije nagib funkcije postaje veoma veliki:

$$\frac{d\theta}{dV} \to \infty. \tag{3.102}$$

U ovoj jednačini:

– $d\theta/dV$ predstavlja promenu ugla uvijanja u odnosu na brzinu leta.

Fizičko tumačenje metode

Predloženi redukovani aeroelastični FEM pristup može se posmatrati kao metoda srednjeg nivoa vernosti između klasičnih analitičkih modela i potpunih aeroelastičnih FEM simulacija.

Klasične metode divergencije uglavnom određuju globalnu aeroelastičnu stabilnost konstrukcije, ali ne opisuju detaljno lokalno naponsko stanje. Sa druge strane, potpuni aeroelastični FEM modeli imaju veoma visoku računsku zahtevnost i zahtevaju specijalizovane aeroelastične solvere.

Predloženi pristup kombinuje prednosti oba pristupa:

– Galerkinova metoda omogućava efikasno određivanje globalnog aeroelastičnog polja deformacija;

– FEM analiza omogućava detaljno određivanje lokalnog strukturnog odziva.

Na taj način moguće je postići značajno realističniji opis ponašanja konstrukcije uz relativno malu računsku zahtevnost.

Prednosti i ograničenja metode

Osnovne prednosti predloženog pristupa su:

– mala računska zahtevnost;

– mogućnost korišćenja standardnih statičkih FEM solvera;

– mogućnost detaljne analize napona i deformacija;

– jednostavnija implementacija u odnosu na potpune aeroelastične FEM modele;

– pogodnost za preliminarno projektovanje i optimizaciju konstrukcija.

Međutim, metoda poseduje i određena ograničenja.

Pošto aerodinamičko opterećenje nije direktno spregnuto sa FEM modelom tokom same statičke analize, lokalni efekti deformacije na raspodelu aerodinamičkog opterećenja nisu u potpunosti obuhvaćeni. Zbog toga metoda predstavlja redukovani aeroelastični pristup, a ne potpunu aeroelastičnu simulaciju.

Uprkos tome, metoda omogućava veoma dobar kompromis između tačnosti, složenosti modela i računske efikasnosti.

Redukovani aeroelastični FEM pristup predstavlja hibridnu numeričko–analitičku metodu za određivanje kritične brzine divergencije i analizu aeroelastičnog odziva konstrukcije.

Osnovna ideja metode zasniva se na korišćenju Galerkinove metode za određivanje globalnog aeroelastičnog polja uvijanja, dok se dobijene rotacije zatim uvode u standardni FEM model kao nametnuti kinematički uslovi.

Na taj način moguće je analizirati lokalno naponsko i deformaciono stanje konstrukcije bez potrebe za specijalizovanim aeroelastičnim solverima.

Predloženi pristup predstavlja efikasan kompromis između jednostavnih analitičkih modela i potpunih aeroelastičnih FEM simulacija i posebno je pogodan za preliminarne aeroelastične analize, optimizaciju konstrukcija i inženjerske procene srednjeg nivoa vernosti.

3.9 Nelinearna divergencija: teorija, modeliranje i inženjerska primena

U klasičnoj aeroelastičnoj analizi divergencija se tretira kao linearni statički problem. Pretpostavlja se da su deformacije male, aerodinamički koeficijenti linearno zavisni od napadnog ugla, a torziona krutost konstrukcije konstantna. U takvom modelu brzina divergencije V_D predstavlja tačku pri kojoj dolazi do gubitka statičke stabilnosti i teorijski neograničenog rasta ugla uvijanja θ.

Međutim, u realnim konstrukcijama ove pretpostavke često nisu ispunjene. Kod savremenih tankih, fleksibilnih i kompozitnih struktura, kao i pri većim napadnim

uglovima, odnos između aerodinamičkog momenta i elastičnog odgovora postaje nelinearan.

Nelinearna divergencija podrazumeva analizu ravnoteže u kojoj su aerodinamičke sile, geometrija i/ili strukturna krutost funkcije deformacije. Za razliku od linearne teorije, nelinearni modeli omogućavaju analizu postkritičnog ponašanja, uključujući stabilne i nestabilne ravnotežne grane, skokove deformacija i pojavu histereze.

Izvori nelinearnosti

Nelinearnosti u aeroelastičkom sistemu mogu se klasifikovati u tri osnovne grupe.

Aerodinamičke nelinearnosti

- Nelinearna zavisnost uzgona od napadnog ugla (posebno blizu sloma uzgona)
- Promena položaja aerodinamičkog centra sa napadnim uglom i Mahovim brojem
- Odvajanje strujanja i nelinearna raspodela pritiska
- Interakcija sa komandnim površinama

Geometrijske nelinearnosti

- Efektivni napadni ugao:

$$\alpha_{\text{eff}} = \alpha_0 + \theta$$

- Promena aerodinamičke poluge $e(\theta)$
- Sprega savijanje-uvijanje
- Velike deformacije koje menjaju geometriju sistema

Strukturne nelinearnosti

- Nelinearna torziona krutost:

$$M_{\text{elast}} = K_1\theta + K_2\theta^2 + K_3\theta^3$$

- Materijalna nelinearnost (npr. kompoziti)
- Promena krutosti usled oštećenja ili temperature

3.9.1 Matematička formulacija problema

Aerodinamički moment može se zapisati u opštem obliku:

$$M_{\text{aero}}(\theta, V) = \frac{1}{2}\rho V^2 S c_{\text{ref}} C_m(\alpha_0 + \theta), \tag{3.103}$$

ili u obliku kompatibilnom sa linearnom teorijom:

$$M_{\text{aero}} = qSel_{\text{char}}\, C_z(\alpha_0 + \theta), \qquad q = \frac{1}{2}\rho V^2. \tag{3.104}$$

Strukturni moment uvijanja u nelinearnom slučaju ima oblik:

$$M_{\text{elast}}(\theta) = K_1\theta + K_2\theta^2 + K_3\theta^3. \tag{3.105}$$

Uslov ravnoteže sistema je:

$$M_{\text{aero}}(\theta, V) - M_{\text{elast}}(\theta) = 0. \tag{3.106}$$

Za razliku od linearnog slučaja, ova jednačina može imati više rešenja za istu brzinu V.

Kritična tačka određuje se uslovom:

$$\frac{\partial M_{\text{aero}}}{\partial \theta} = \frac{\partial M_{\text{elast}}}{\partial \theta}, \tag{3.107}$$

uz dodatni uslov stabilnosti:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = 0, \tag{3.108}$$

gde je Π ukupni potencijal sistema.

3.9.2 Postkritično ponašanje

Nelinearna analiza omogućava uvid u ponašanje sistema nakon linearne kritične tačke.

- **Hardening sistem ($K_3 > 0$):** deformacija raste, ali se stabilizuje na višoj ravnotežnoj grani.
- **Softening sistem ($K_3 < 0$):** dolazi do naglog skoka deformacije pri brzini nižoj od linearno predviđene.
- **Histereza:** različite putanje pri povećanju i smanjenju brzine.
- **Prelaz ka dinamičkom odgovoru:** pri uključivanju inercije i prigušenja sistem može preći u dinamički aeroelastički režim.

3.9.3 Numeričke metode za rešavanje problema nelinearnosti

Zbog nelinearne prirode problema, analitičko rešenje najčešće nije moguće. Umesto toga koriste se numeričke metode.

Newton–Raphson metoda

Jednačina ravnoteže rešava se iterativno:

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{R(\theta_i, V)}{R'(\theta_i, V)}, \tag{3.109}$$

gde je:

$$R(\theta, V) = M_{\text{aero}} - M_{\text{elast}}.$$

Metoda je efikasna, ali može biti nestabilna u blizini kritične tačke.

Arc-length metoda

Za praćenje ravnotežne grane koristi se uslov:

$$(\Delta\theta)^2 + (\Delta V)^2 = \Delta s^2. \tag{3.110}$$

Ova metoda omogućava prolazak kroz tačke bifurkacije i standardna je u FEM analizama.

Numerička integracija torzione krutosti

Efektivna torziona krutost određuje se iz:

$$\frac{1}{C_\theta} = \int_0^{y_{\text{char}}} \frac{dy}{GJ(y)}. \tag{3.111}$$

Integral se rešava numerički (trapezna metoda, Simpsonovo pravilo), posebno kada je $J(y)$ složena funkcija.

CFD-CSD analiza

Za visoku tačnost koristi se spregnuta analiza:

– CFD za aerodinamiku

– FEM za strukturu

Nelinearna divergencija je posebno značajna kod:

– fleksibilnih UAV krila

– kompozitnih konstrukcija

– raketnih stabilizatora

– adaptivnih (morfing) krila

Nelinearna divergencija predstavlja proširenje klasične teorije koje omogućava realističnije modeliranje aeroelastičkog ponašanja. Linearna analiza daje brzu procenu, dok nelinearni modeli omogućavaju detaljno razumevanje stabilnosti i postkritičnog ponašanja konstrukcije.

3.10 Divergencija u supersoničnom režimu strujanja

Problem divergencije dobro je dokumentovan i analiziran u podzvučnoj aerodinamici, međutim, supersonični režim leta ($M > 1$) uvodi fundamentalne promene u raspodeli pritiska, položaju ključnih aerodinamičkih tačaka i termodinamičkim efektima na strukturu.

3.10.1 Fizika supersoničnog strujanja i pomeranje aerodinamičkog centra

U podzvučnom režimu, aerodinamički centar ($A.C.$) tankog aeroprofila nalazi se na približno 25% tetive ($c/4$) od napadne ivice. Prilikom prelaska u supersonični režim, usled formiranja kosih udarnih talasa, raspodela pritiska duž tetive postaje znatno ravnomernija (pravougaona ili trougaona u zavisnosti od geometrije profila).

Ova promena uzrokuje pomeranje aerodinamičkog centra unazad, ka sredini tetive, odnosno na oko 50% tetive ($c/2$). Pomeranje $A.C.$ unazad ima stabilizujući efekat ukoliko se elastična osa ($E.A.$) krila nalazi ispred njega. Međutim, kod savremenih tankih supersoničnih krila, elastična osa je često pomerena unazad zbog strukturnih ograničenja i smeštaja rezervoara, pa rastojanje ekscentriciteta e (krak između aerodinamičkog centra i elastične ose) ostaje kritični parametar. Povećanje ugla zakretanja θ usled uvijanja stvara dodatni aerodinamički moment koji teži da još više uvije strukturu, formirajući pozitivnu spregnutu petlju.

Za analizu stabilnosti u supersoničnom režimu koristi se diferencijalna jednačina torzione ravnoteže krila posmatranog kao konzolni nosač. Ako posmatramo elementarnu dužinu krila dy, promena ugla uvijanja $\theta(y)$ pod dejstvom kontinualnog aerodinamičkog momenta torzije $m_t(y)$ data je kao:

$$\frac{d}{dy}\left(GJ\frac{d\theta}{dy}\right) = -m_t(y) \tag{3.112}$$

Gde je GJ kao i ranije torziona krutost krila. Aerodinamički moment po jedinici raspona oko elastične ose iznosi:

$$m_t(y) = qc^2 eC_{L\alpha}\theta(y) \tag{3.113}$$

U supersoničnom režimu, prema linearizovanoj Ackeretovoj teoriji za tanke profile, gradijent koeficijenta uzgona $C_{L\alpha}$ je funkcija Mahovog broja (M):

$$C_{L\alpha} = \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \tag{3.114}$$

Zamenom aerodinamičkog momenta u diferencijalnu jednačinu i uvođenjem graničnih uslova za konzolu (uklješteno u korenu $\theta(0) = 0$, slobodno na kraju $\theta'(l) = 0$), dobija se svojstveni problem čije najniže sopstvene vrednosti daju kritični dinamički pritisak supersonične divergencije (q_d):

$$q_d = \frac{\pi^2 GJ}{4l^2 ce\left(\frac{4}{\sqrt{M^2-1}}\right)} \tag{3.115}$$

Iz ove relacije uočavaju se dva suprotstavljena efekta:

1. **Stabilizujući efekat Mahovog broja:** Kako M raste, imenilac se smanjuje jer gradijent uzgona $C_{L\alpha}$ opada, što teoretski podiže vrednost q_d.

2. **Destabilizujući termički efekat:** Pri visokim supersoničnim brzinama ($M > 2$), aerodinamičko zagrevanje (kinetička energija kočenja vazduha) drastično podiže temperaturu oplate krila. Ovo dovodi do pada modula smicanja materijala (G), čime opada ukupna torziona krutost GJ, a samim tim i stvarna granica divergencije.

Zbog zahteva za malom relativnom debljinom profila, supersonična krila su inherentno podložna aeroelastičnim deformacijama. Inženjering struktura se oslanja na tri osnovna rešenja:

Geometrijska konfiguracija i strela krila: Zakošenost unazad (*Sweepback*) deluje kao prirodni amortizer divergencije. Kada se unazad zakošeno krilo savije usled uzgona, geometrija uzrokuje lokalno smanjenje napadnog ugla (tzv. *"wash-out"* efekat), što rasterećuje krilo. Kod krila sa unapred zakošenom strelom (*Forward sweep*), efekat je obrnut (*"wash-in"*), i ona zahtevaju ekstremno visoku krutost kako bi se izbegla divergencija pri niskim dinamičkim pritiscima.

Aeroelastično krojenje (Aeroelastic Tailoring): Upotrebom naprednih kompozitnih materijala (ugljenična vlakna u epoksidnoj matrici), smer polaganja slojeva se optimizuje tako da se postigne željena sprega između savijanja i uvrtanja (engl. *bend-twist coupling*). Struktura se projektuje tako da unutrašnje sile usled savijanja krila nagore automatski zakreću napadnu ivicu nadole. Ovaj mehanizam direktno smanjuje efektivni lokalni napadni ugao, neutrališući prirast aerodinamičkog momenta i dramatično pomerajući granicu torzione divergencije van operativnog anvelopa leta.

Torziona divergencija u supersoničnom režimu ne može se posmatrati isključivo kroz aerodinamičke sile izolovane strukture. Kompleksno međudejstvo smanjenja

Tabela 3.3: Uporedni prikaz parametara aeroelastične stabilnosti po režimima leta.

Režim leta	**Tipičan položaj A.C.**	**Gradijent uzgona $C_{L\alpha}$**	**Glavni strukturni rizik**
Podzvučni ($M < 0.8$)	25% tetive ($c/4$)	Konstantan / blagi rast	Čista torziona divergencija
Supersonični ($M > 1.2$)	50% tetive ($c/2$)	Opada sa $\frac{4}{\sqrt{M^2-1}}$	Termo-aeroelastična divergencija

aerodinamičkog gradijenta uzgona, pomeranja aerodinamičkog centra unazad i degradacije krutosti materijala usled povišenih temperatura zahteva primenu naprednih numeričkih metoda (FEA spregnutih sa solverima za numeričku dinamiku fluida - CFD) već u ranoj fazi konceptualnog projektovanja supersoničnih letelica.

Pitanja i odgovori

1. **Šta je torziona divergencija i koji mehanizam je uzrokuje?**

   Torziona divergencija je aeroelastična nestabilnost koja nastaje kada aerodinamički moment, koji raste sa povećanjem ugla napada, deluje na krilo sa ograničenom torzionom krutosti. Usled elastične deformacije (uvijanja), napadni ugao lokalno raste, što dodatno pojačava aerodinamički moment — stvarajući pozitivnu povratnu spregu. Kada ova sprega prevaziđe sposobnost strukture da se opire uvijanju, dolazi do eksponencijalnog porasta deformacija, potencijalno do strukturalnog kolapsa.

2. **Koja je fizička interpretacija kritične brzine divergencije V_D i kako se izračunava?**

   Kritična brzina divergencije je brzina pri kojoj krilo gubi stabilnost — ugao uvijanja teži beskonačnosti. Izračunava se po formuli:

   $$V_D = \sqrt{\frac{2 \cdot C_\theta}{\rho \cdot \frac{dC_z}{d\alpha} \cdot S \cdot e \cdot l}}$$

   gde je C_θ torziona krutost, ρ gustina vazduha, $\frac{dC_z}{d\alpha}$ gradijent uzgona, S površina krila, e bezdimenzionalno rastojanje između aerodinamičkog centra i centra smicanja, a l tetiva.

3. **Koja je razlika između aerodinamičkog centra i centra smicanja i zašto je njihovo nepoklapanje ključno za torzionu divergenciju?**

   Aerodinamički centar je tačka oko koje je koeficijent momenta praktično nezavisan od napadnog ugla (obično na 25% tetive). Centar smicanja je tačka kroz koju mora delovati transverzalna sila da ne bi izazvala uvijanje. Njihovo nepoklapanje ($e \neq 0$) uzrokuje da aerodinamička sila stvara dodatni moment oko elastične ose, što direktno doprinosi torzionoj deformaciji i potencijalnoj divergenciji.

4. **Kako se određuje torziona krutost C_θ metodom karakterističnog preseka?**

   Torziona krutost se definiše kao odnos torzionog momenta i ugla uvijanja: $C_\theta = M_T/\theta$ [N $\cdot$ m/rad]. Za karakteristični presek (obično na 70–75% poluraZmaha), može se odrediti analitički (Bredt-Batho formula za torzionu kutiju), eksperimentalno (merenjem ugla uvijanja pod poznatim momentom) ili numerički (metodom konačnih elemenata).

5. **Objasniti pozitivnu povratnu spregu koja vodi torzionoj divergenciji.**

   Mehanizam glasi: povećanje ugla uvijanja $\theta \rightarrow$ povećanje efektivnog napadnog ugla $\alpha_{ef} = \alpha + \theta \rightarrow$ povećanje aerodinamičke sile uzgona $R_z \rightarrow$ povećanje

aerodinamičkog momenta oko centra smicanja → dalje povećanje θ. Ovaj samopojačavajući proces, ako nije uravnotežen elastičnim restitucionim momentom, vodi divergenciji.

6. **Koja su tri osnovna pristupa za određivanje koeficijenta torzione krutosti i koje su njihove prednosti?**

   Tri pristupa su: (1) **Analitički** — Bredt-Batho formula za torzionu kutiju, pogodan za preliminarne proračune; (2) **Eksperimentalni** — fizičko testiranje sa primenjenim torzionim momentom i merenjem ugla uvijanja, daje najtačnije rezultate za realne strukture; (3) **Numerički** — metoda konačnih elemenata (FEA), omogućava analizu kompleksnih geometrija i materijala bez fizičkog prototipa.

7. **Koji su granični uslovi za diferencijalnu jednačinu torzione divergencije krila promenljivih parametara?**

   Granični uslovi su: (1) Na korenu krila ($y = 0$) — ugao uvijanja je nula: $\theta(0) = 0$ (krilo učvršćeno); (2) Na vrhu krila ($y = b/2$) — torzioni moment je nula: $\theta'(b/2) = 0$ (slobodan kraj). Ovi uslovi određuju oblik baznih funkcija u metodi Galerkina.

8. **Kako metoda Galerkina omogućava rešavanje problema torzione divergencije za krila promenljivih parametara?**

   Metoda Galerkina aproksimira rešenje kao $\theta(y) = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot \varphi_i(y)$, gde su $\varphi_i(y) = y \cdot (1 - 2y/b)^i$ bazne funkcije koje zadovoljavaju granične uslove. Uvođenjem u diferencijalnu jednačinu i ortogonalizacijom (integracijom sa težinskim funkcijama), problem se svodi na sistem linearnih jednačina. Kritična brzina je ona pri kojoj determinanta sistema $D(V)$ postaje nula.

9. **Zašto je torziona divergencija posebno izražena kod vitkih, elastičnih krila i kako se sprečava?**

   Vitka krila imaju nisku torzionu krutost (C_θ) i često veliko rastojanje e između aerodinamičkog centra i centra smicanja, što povećava aerodinamički moment sprega. Mere prevencije uključuju: povećanje torzione krutosti (deblji zidovi, zatvorene torzione kutije), pomeranje centra smicanja ka aerodinamičkom centru (smanjenje e), optimizaciju raspodele mase, i korišćenje kompozitnih materijala sa povoljnim odnosom krutosti i težine.