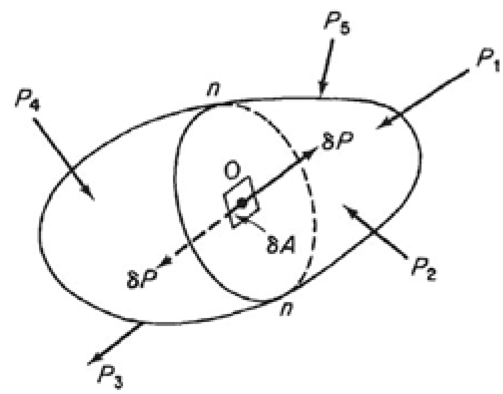
2 Osnove opšte teorije elastičnosti

2.1 Uvod

Posmatramo tela izložena spoljnim silama koja su elastična (po prestanku dejstva opterećenja , vraćaju se u prvobitan oblik), izotropna (imaju ista svojstva u svim pravcima) i smatramo da je masa je kontinualno raspoređena po zapremini tela. Pod dejstvom spoljnih sila, ovakvo telo će se deformisati, i razmateraćemo slučajeve malih deformacija. Spoljne sile mogu biti površinske i zapreminske. Površinske sile deluju na tačke spoljnih površina i nezavisne su od mase. Zapreminske sile deluju u svim tačkama tela i proporcionalne su masi tela.

2.2 Definicija napona i deformacija

Posmatrajmo telo napregnuto spoljnim silama $\mathbf{P}_i$ (i = 1, n). Pretpostavimo da se pod dejstvom ovakvog sistema sila telo nalazi u ravnoteži Zamislimo da je telo podeljeno zamišljenom ravni na dva dela u tački O. Posmatrajući svaki deo tela posebno , zaključujemo da će se on nalaziti u ravnoteži pod dejstvom sistema spoljnih sila kao i odgovarajućih unutrašnjih sila raspoređenih po poprečnom preseku. Unutrašnje sile predstavljaju uticaj jednog na drugi deo presečenog tela.

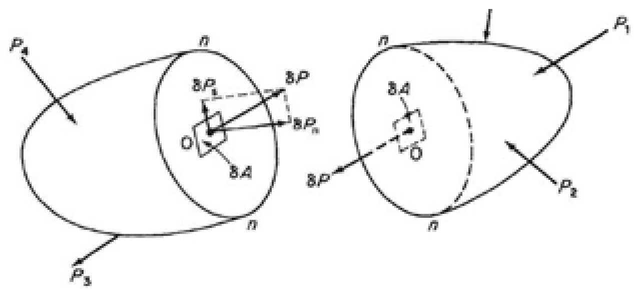


Sl. 2.1

Ukoliko uočimo elementarnu površinu δA sa normalom N u nekoj tački O na preseku tela i sa δP obeležimo rezultantu unutrašnjih sila po površini δA, definisaćemo napon kao

$$\lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta P}{\delta A} \qquad (2.1)$$

Kako u opštem slučaju normala i rezultanta unutrašnjih sila nisu kolinearne razlaganjem vektora unutrašnjih sila na pravac normalan na elementarnu površinu kao i u ravan preseka definišemo normalne i tangencijalne napone



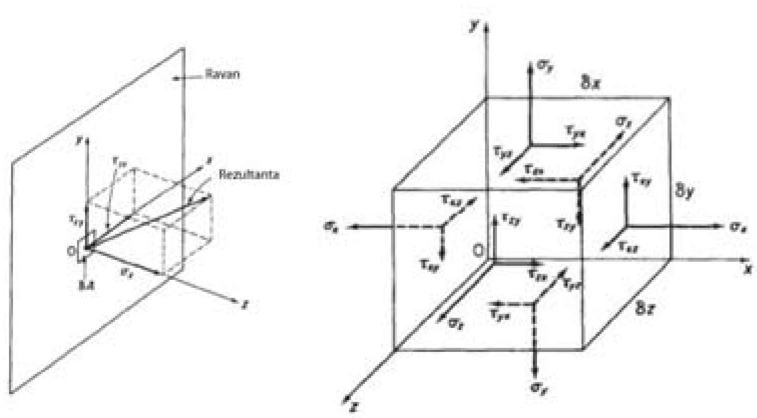
Sl. 2.2

Komponente napona , dakle možemo predstaviti

$$\sigma = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta P_n}{\delta A}$$
$$\tau = \lim_{\delta A \to 0} \frac{\delta P_s}{\delta A} \qquad (2.2)$$

2.3 Označavanje komponenti napona

Napon kao tenzorsku veličinu označavamo sa dva indeksa. Prvi indeks označava pravac normale ravni na koju se napon odnosi a drugi na pravac napona.

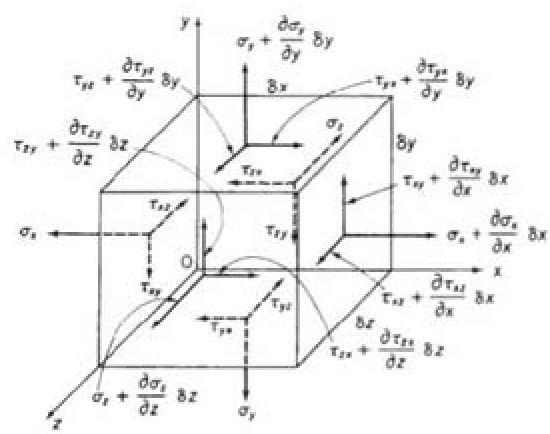


Sl. 2.3

Normalni napon usvaja se kao pozitivan kada je zatežući, odnosno kada deluje od površine na koju je normalan. Pozitivne pravce smičućih napona definišemo na sledeći način: za površinu čiji je napon zatezanja u pozitivnom pravcu odgovarajuće ose, smičući napon će biti pozitivan kada se poklapa sa pozitivnim pravcima ostalih dvaju osa.

2.4 Jednačine ravnoteže

Posmatrajmo ravnotežu elementarnog delića izdvojenog iz napregnutog tela, sa ivicama dx, dy, dz. Opterećen je kontinualno raspoređenim unutrašnjim silama, dok u pojedinim tačkama deluju zapreminske sile.



Sl. 2.4

Posmatrajući ravnotežu sila u x pravcu , sledi da je

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z - \sigma_x \delta y\delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta y\right)\delta x\delta z$$
$$- \tau_{yx}\delta x\delta z + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y - \tau_{zx}\delta x\delta y + X\delta x\delta y\delta z = 0 \quad (2.3)$$

Odnosno posle sređivanja

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (2.4)$$

Posmatrajući ravnotežu momenata oko x ose, sledi da je:

$$\tau_{xy}\delta y\delta z\frac{\delta x}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\delta x\right)\delta y\delta z\frac{\delta x}{2} -$$
$$- \tau_{yx}\delta x\delta z\frac{\delta y}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta y\right)\delta x\delta z\frac{\delta y}{2} = 0$$
$$\tau_{xy}\delta x\delta y\delta z + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\delta y\delta z\frac{(\delta x)^2}{2} - \tau_{yx}\delta x\delta y\delta z -$$
$$- \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\delta x\delta z\frac{(\delta y)^2}{2} = 0 \quad (2.5)$$

Posle sređivanja i zanemarivanja članova višeg reda, sledi da je

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.6)$$

Posmatrajući ravnotežu sila u y i z pravcu na sličan način , može biti pokazano da važe sledeće relacije:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Z = 0 \quad (2.7)$$

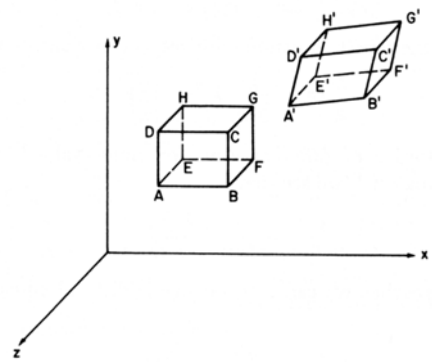
Odnosno posmatrajući ravnotežu momenata oko y i z ose sledi da je i :

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad (2.8)$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Prethodno izvedene jednačine poznate su pod nazivom Navijeove (Navier) jednačine ravnoteže elementarnog dela.

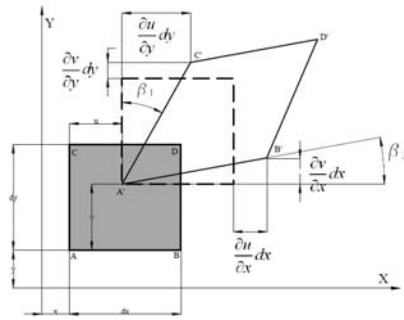
2.5 Deformacije

Za nalaženje napona uslovi ravnoteže nisu dovoljni i potrebno je uzeti u obzir deformacije tela usled delovanja spoljnih sila. Ako su koordinate proizvoljne tačke pre deformisanja bile x, y, i z njene će koordinate posle deformisanja biti x+u,y+v i y+w, gde su u,v, i w pomeranja tačke u x,y i z pravcu. Pomeranja su funkcije x,y i z.



Sl. 2.5

Posmatrajmo dvodimenzionalni slučaj deformacija



Sl. 2.6

Kako je:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dx}{dx} \qquad (2.9)$$

$$\left(A'B'\right)^2 = \left[dx\left(1+\varepsilon_x\right)\right]^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2 \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_x^{\,2} + 2\varepsilon_x + 1 = 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \qquad (2.11)$$

Za slučaj malih deformacija mogu biti zanemareni članovi višeg reda pa na osnovu toga sledi da su aksijalne deformacije u funkciji pomeranja definisane sledećim relacijama:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (2.12)$$

Deformacije klizanja definišemo na sledeći način:

$$\gamma_{xy} = \beta_1 - \beta_2 \qquad (2.13)$$

Vodeći računa da se analizira slučaj malih deformacija, može se smatrati da je b_1= tan b_1 odnosno b_2= tan b_2 , pa su deformacije klizanja:

$$\beta_1 = \frac{(\partial v / \partial x)\, dx}{dx + (\partial u / \partial x)\, dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.14)$$

Na sličan način dobija se da je:

$$\beta_2 = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.15)$$

Tako da su deformacije klizanja u funkciji pomeranja definisine su na sledeći način:

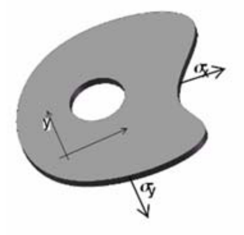
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.16)$$

Prethodne jednačine napisane u matričnom obliku glase:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

2.6 Ravansko stanje napona

Ravansko ili dvodimenzionalno stanje napona javlja se kod tela čija je jedna dimenzija u pravcu jedne od osa vrlo mala u odnosu na ostale. Takav slučaj naponskog stanja javlja se kod tankozidnih konstrukcija, slučaj tankih ploča pod dejstvom sila ravnomerno podeljenih duž debljine i paralelnih ravni ploče.



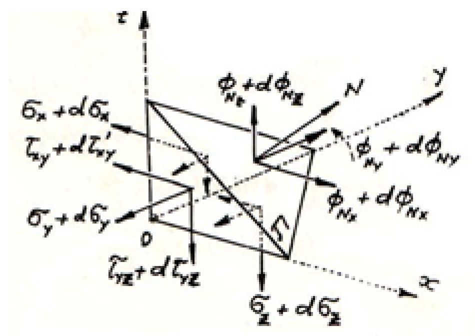
Sl. 2.7

Kako na osnovama ploče ne deluju površinske sile, naponi u pravcu z ose (osa normalna na ravan ploče) moraju biti jednaki nuli. Pošto je debljina ploče mala, može se sa velikom tačnošću predpostaviti da su ovi naponi jednaki nuli i u tačkama tela između osnova. Takođe, preostali naponi mogu se smatrati konstantni duž debljine, odnosno naponi su zavisni samo od koordinata x i y ali ne i od z. Na osnovu ovoga sledi da jednačine ravnoteže za slučaj ravanskog stanja napona glase:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+Y=0\end{aligned} \qquad (2.18)$$

2.7 Naponi za različite ravni

Naponsko stanje tela biće potpuno poznato ako su poznati naponi u svim tačkama i to za sve ravni kroz odgovarajuće tačke. Naponi za razne ravne međusobno su zavisni, odnosno ako su poznati komponentini naponi σx ,σy,σz ,τxy ,τyz ,τzx za bilo koju tačku tela moguće je izračunati napon za proizvoljnu ravan kroz istu tačku. Povucimo kroz tačku O napregnutog tela tri ortogonalne ravni. Neka su komponente napona u toj tački σx ,σy,σz ,τxy ,τyz ,τzx poznate. Da bismo našli napone za ravan kroz tačku O, čija normala N ima kosinuse smerova l, m i n, zamislimo nrku ravan π , paralelnu ovoj, na beskonačno malom udaljenu dh od O.



Sl. 2.8

Ova će ravan sa koordinatnim ravnima obrazovati tetraedar, sa ivicama dx, dy, dz. Obeležavajući napone za posmatranu ravan sa ΦNx ,ΦNy i ΦNz , uslov ravnoteže u X pravcu je:

$$\begin{aligned}&\left(\phi_{Nx}+d\phi_{Nx}\right)A-\left(\sigma_x+d\sigma_x\right)lA-\left(\tau_{xy}+d\tau_{xy}\right)mA-\\&-\left(\tau_{zx}+d\tau_{zx}\right)nA+X\left(\frac{1}{3}Adh\right)=0\end{aligned} \qquad (2.19)$$

Posle sređivanja sledi:

$$\phi_{Nx}=l\sigma_x+m\tau_{xy}+n\tau_{zx} \qquad (2.20)$$

Slične jednačine dobijamo i iz uslova ravnoteže u y i z pravcu, pa puštajući da dh teži nuli i deleći odgovarajuće jednačine sa A dobija se:

$$\phi_{Ny} = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{yz}$$
$$\phi_{Nz} = l\tau_{zx} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \qquad (2.21)$$

Ove jednačine omogućuju nam da pomoću šest poznatih komponenti napona za tri ortogonalne ravni u proizvoljnoj tački nađemo komponente napona za bilo koju ravan kroz tu tačku.

2.8 Glavni naponi

U bilo kojoj tački tela postoje tri međusobno upravne ravni na kojima su ukupni naponi upravni, i za jednu od ovih ravni je normalni napon najveći a za jednu najmanji. Naponi koji odgovaraju ovim ravnima nazivaju se glavnim naponima i obično se obeležavaju sa σ_1 ,σ_2 i σ_3 .Glavne napone σ_i (i=1,2,3) i njihove kosinuse smerova nalazimo iz Košijevih jednačina koje u slučaju glavnih napona postaju:

$$\sigma_i l_i = l_i\sigma_x + m_i\tau_{xy} + n_i\tau_{zx}$$
$$\sigma_i m_i = l_i\tau_{xy} + m_i\sigma_y + n_i\tau_{yz} \qquad (2.22)$$
$$\sigma_i n_i = l_i\tau_{zx} + m_i\tau_{yz} + n_i\sigma_z$$

2.9 Uslovi kompatibiliteta

Preko jednačina deformacija moguće je pronaći deformacije ako su nam poynata pomeranja tačke u bilo kojoj tački napregnutog tela. Da bi prethodni sistem imao jednoznačna rešenja potrebno je da budu zadoveljeni i uslovi kompatibilnosti. Ti uslovi kompatibilnosti glase:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad (2.23) \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial_y \partial_z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial_z \partial_x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \qquad (2.24) \\
&\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial_x \partial_y} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Ove jednačine poznate su pod nazivom jednačine kompatibiliteta ili Saint Venantove jednačine.

2.10 Generalisani Hukov zakon

Pod idealno elastičnim telom podrayumevamo tela kod kojih su naponi linearne funkcije deformacija i obrnuto. Za takva tela veza između napona i deformacija može biti napisana u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x + c_{12}\sigma_y + c_{13}\sigma_z + c_{14}\tau_{xy} + c_{15}\tau_{zy} + c_{16}\tau_{zx} \\
\varepsilon_y &= c_{21}\sigma_x + c_{22}\sigma_y + c_{23}\sigma_z + c_{24}\tau_{xy} + c_{25}\tau_{zy} + c_{26}\tau_{zx} \\
\varepsilon_z &= c_{31}\sigma_x + c_{32}\sigma_y + c_{33}\sigma_z + c_{34}\tau_{xy} + c_{35}\tau_{zy} + c_{36}\tau_{zx} \\
\gamma_{xy} &= c_{41}\sigma_x + c_{42}\sigma_y + c_{43}\sigma_z + c_{44}\tau_{xy} + c_{45}\tau_{zy} + c_{46}\tau_{zx} \qquad (2.25) \\
\gamma_{yz} &= c_{51}\sigma_x + c_{52}\sigma_y + c_{53}\sigma_z + c_{54}\tau_{xy} + c_{55}\tau_{zy} + c_{56}\tau_{zx} \\
\gamma_{zx} &= c_{61}\sigma_x + c_{62}\sigma_y + c_{63}\sigma_z + c_{64}\tau_{xy} + c_{65}\tau_{zy} + c_{66}\tau_{zx}
\end{aligned}$$

2.11 Problemi teorije elastičnosti

U svakom elastičnom, napregnutom telu potrebno je odrediti naponsko stanje u svakoj tački toga tela. To znači da je potebno znati šest komponenti napona, šest deformacija i tri pomeranja u svakoj tački. Ukupno postoji petnaest nepoznatih veličina koje je potrebno odrediti. Rešavanjem prethodno navedenih jednačina (jednačina ravnoteže, jednačina deformacija, generalisanog Hukovog zakona) i zadovoljavajući uslove kompatibilnosti, moguće je rešiti problem teorije elastičnosti, odnosno jednoznačno definisati naponsko deformaciono stanje napregnutog tela u svakoj njegovoj tački za zadate konturne uslove.

2.12 Rešeni primeri

Primer 2.1

Odrediti vrednost $f(2.1)$ *funkcije* $f(x) = 3 \cdot x^2 + 7$

Rešenje

Funkcija f(x) može biti napisana u obliku Tejlorovog reda na sledeći način:

$$f(x + \Delta x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x + \Re$$

Pa je vrednost funkcije u traženoj tački:

$$f(2 + 0.1) = f(2) + 6 \cdot 2 \cdot 0.1 + \Re = 19 + 12 \cdot 0.2 + \Re \approx 20.2$$

Primer 2.2

Odrediti vrednost $z(1.1, 2.15)$ *funkcije* $z(x, y) = x^2 + y^2$

Rešenje

Funkcija z(x,y) može biti napisana u obliku Tejlorovog reda na sledeći način:

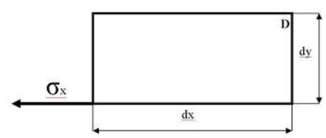
$$z(x+\Delta x, y+\Delta y) = z(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=x_0, y=y_0} \cdot \Delta y + \Re$$

Pa je vrednost funkcije u traženoj tački:

$$z(1.1, 2.15) \approx 5 + 4 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.15 = 5.70$$

Primer 2.3

U tački A, elastičnog napregnutog tela, poznato je naponsko stanje i iznosi σ_x. Izraziti napon u tački D u funkciji napona u tački A.



Sl. 2.9

Rešenje

Za tačku B koja se nalazi u okolini tačke A na rastojanju dx, može biti napisano:

$$\sigma_B = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx$$

Takođe, napon u tački D, a u funkciji napona u tački B je:

$$\sigma_D = \sigma_B + \frac{\partial \sigma_B}{\partial y} \cdot dy$$

Na osnovu prethodnih jednačina sledi:

$$\sigma_D = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx \right) =$$

$$= \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} \cdot dx \cdot dy$$

Zanemarujući članove višeg reda, napon u tački D iznosi:

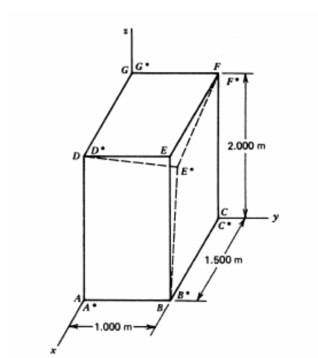
$$\sigma_D = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \cdot dy$$

Primer 2.4

Na slici (Sl. 2.10) je prikazan paralelopiped ABCDEFG u svom nedeformisanom i deformisanom stanju. Pomeranja tačaka zadate su sledećim funkcijama

u= C1 x y z
v= C2 x y z
w= C3 x y z

Pri čemu su C1, C2 i C3 konstante koje je potrebno odrediti ako se zna da su koordinate tačke E u deformisanom položaju (1.504, 1.002,1.996). Takodje odrediti deformacije klizanja (γ_{xy}) u tački E.

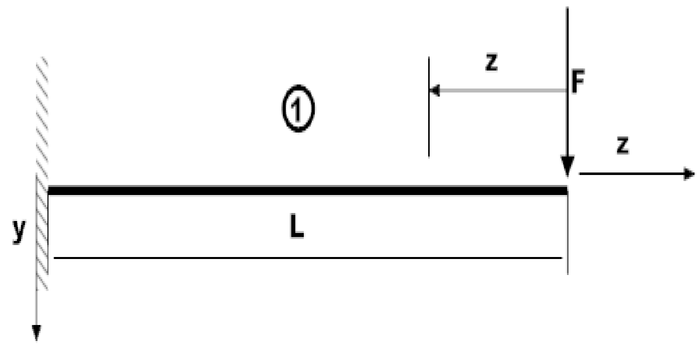


Sl. 2.10

Rešenje

Primer 2.5

Za konzolu opterećenu na slobodnom kraju napisati jednačinu elastične linije a metodom deformacionog rada odrediti pomeranje tačke na kraju konzole.



Sl. 2.11

Rešenje

Elastična linija konzole:

$$\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{M_f(z)}{EI}, EI\frac{d^2y}{dz^2}=F\cdot z, EI\frac{dy}{dz}=\frac{F\cdot z^2}{2}+C_1$$

$$\frac{dy}{dz}=0\Big|_{z=L}, C_1=-\frac{F\cdot L^2}{2}, EI\frac{dy}{dz}=\frac{F\cdot z^2}{2}-\frac{F\cdot L^2}{2}$$

$$EI\cdot y=\frac{F\cdot z^3}{6}-\frac{F\cdot L^2}{2}z+C_2, y=0\Big|_{z=L}$$

$$C_2=-\frac{F\cdot L^3}{6}+\frac{F\cdot L^3}{2}, C_2=\frac{F\cdot L^3}{2}$$

$$y=\frac{1}{EI}(\frac{F\cdot z^3}{3}-\frac{FL^2}{2}z+\frac{FL^3}{2}), y\Big|_{z=L}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{F\cdot L^3}{3}$$

*Pomeranje tačke na vrhu konzole***:**

$$\delta_p = \frac{\partial A_d}{\partial F}, A_d = \frac{1}{2}\int_L \frac{M^2}{EI} \cdot dz$$

$$\delta_v = \int_L \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial F_i} \cdot dz = \sum_k \frac{1}{(EI)_k} \int M_k \frac{\partial M_k}{\partial F_i} \cdot dz$$

$$\delta_v = \frac{1}{EI}\int_0^L Fz \cdot z \cdot dz = \frac{1}{EI} \cdot \frac{Fz^3}{3}\Big|_0^L = \frac{FL^3}{3B}$$